Приймук Татьяна Викторовна

В 1991 году с отличием окончила физико-математический факультет Орехово-Зуевского педагогического института по специальности «Математика, информатика и вычислительная техника».

В 2006 г. Татьяне Викторовне была присвоена высшая квалификационная категория, которая была подтверждена в 2010 году.

Работала учителем математики в МАОУ «Куровская гимназия», по совместительству – в ЦМШ в 2016 г., коммерческим директором в ООО «Валитекс» (в 2003-2004) и в ООО «Ява-Россия» (в 2012-2020 гг.). С января 2020 года работает учителем математики в МССМШ им. Гнесиных.

Ученики Татьяны Викторовны принимали активное участие в районных математических олимпиадах и занимали призовые места, а также участвовали в научных конференциях молодых исследователей «Шаг в будущее» (2006 г. – диплом 1 степени, 2007 г., 2010 г. – дипломы 2 степени), в Международном конкурсе «Математика и проектирование» (2008 г. – 2 место в номинации «Геометрические миниатюры»), в Международном математическом конкурсе – игре «Кенгуру» (2010 г. – 1 место).

Т.В. Приймук входила в состав жюри районных научно-практических конференций «Шаг в будущее» и «Старт в науку».

Награждена Премией Губернатора Московской области Б.В. Громова (26.09.2008). Имеет благодарственное письмо от Главы Орехово-Зуевского муниципального района А.П. Филиппова (май 2008). Награждена Почетной грамотой Министерства образования и науки Российской Федерации «за значительные успехи в организации и совершенствовании учебного и воспитательного процессов, формирование интеллектуального, культурного и нравственного развития личности, большой личный вклад в практическую подготовку учащихся и воспитанников» (05.10.2010).

Содержание

Предисловие

Лекции из серии «Математический язык красоты» рассчитаны главным образом на учащихся 8, 9 классов МССМШ им. Гнесиных, причём первая лекция обычно автором читается для восьмиклассников в конце второй четверти учебного года, а вторая лекция – для девятиклассников в четвёртой четверти.

При формировании содержания лекций отбор материала происходил на основе философских, исторических и культурологических сведений. Они определили заказ на математическое наполнение. Однако математика служит в этих лекциях не второстепенным, а самым главным связующим компонентом содержания.

В лекциях объединены несколько содержательных линий: историко-философская, естественно-культурологическая и математическая.

Историко-философская составляющая лекций не только раскрывает процесс развития и применения тех или иных математических понятий и задач, но и открывает их методологическую сторону.

Естественно-культурологическая составляющая лекций показывает взаимосвязь природных форм с произведениями искусства. Важнейшая цель этой составляющей – показать красоту как главную категорию эстетики и математики.

Математическая составляющая лекций представлена системой понятий; включает несколько экспериментов и небольшое количество уравнений, помогающих лучше раскрыть каждую тему.

Три обозначенные линии тесно переплетены, дополняют друг друга, порой одна преобладает над другой, и все вместе они помогают увидеть мир в единстве, красоте и многообразии.

Материал лекций учитывает особенности обучающихся МССМШ им. Гнесиных, которые восприимчивы к образности, яркости и красоте. Форма школьной лекции, сопровождающейся беседой с учащимися, наиболее эффективна для передачи предлагаемого в этой брошюре теоретического материала. При использовании предлагаемых в этой брошюре лекций другими учителями может возникнуть необходимость усиления содержания той или иной составляющей в зависимости от профиля класса или особенности учащихся. Например, в математических классах можно добавить задачи, а в гуманитарных – дать больше исторических, философских и прикладных примеров.

В заключение признаем, что проведение подобных лекций учителем для его учеников станет важным шагом в понимании учащимися мира, в котором они живут, и станет основой для дальнейшей их совместной или самостоятельной работы на пути к открытию нового.

<u>Лекция 1. «Золотое сечение. Математический язык красоты»</u>

Цель лекции: познакомить учащихся с числом Ф (константой гармоничности), отметить главные вехи в истории числа Ф, рассказать учащимся о применении константы гармоничности в живописи, архитектуре и природе.

«Чувствам человека приятны объекты,

обладающие правильными пропорциями»

Святой Фома Аквинский

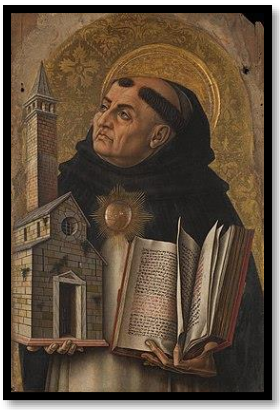


Рисунок 1. Святой Фома Аквинский (1225-1274)

Считается, что определение константе гармоничности дал Пифагор, именно с него все учёные начинают историю числа Ф. Согласно учению Пифагора, с помощью натуральных чисел можно описать окружающий нас мир. «Числа правят миром,» - говорил Пифагор. Ещё он сказал: «Число – это закон и связь мира, сила, царящая над богами и смертными. Сущность вещей есть число, которое вносит во всё единство и гармонию. Всё есть число». Числа отражают и направляют человеческую деятельность и являются самым фундаментальным инструментом цивилизации. Пифагор завещал нам постулат: «Цифра – основа всего, если ты познал цифру, ты познал мир», а также оставил нам наказ: «Измеряй свои желания, взвешивай свои мысли, исчисляй свои слова». Как и Фома Аквинский впоследствии, Пифагор считал, что «зрительно красиво лишь то, что совершенно математически».

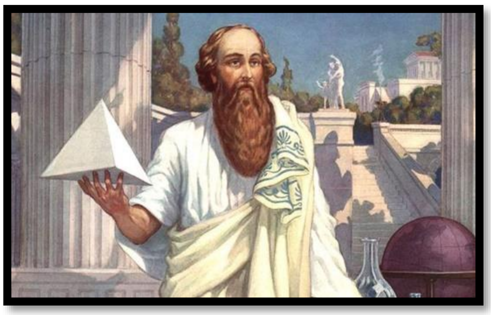


Рисунок 2. Пифагор (ок. 570 – ок. 490 до н.э)

Пифагор и его ученики были знакомы не только с натуральными, но и с целыми и рациональными числами. А также пифагорейцам были известны иррациональные числа, такие как $\sqrt{2}$.

<u>Натуральные числа</u> – это числа, применяемые для счёта предметов (1, 2, 3, 4, 5, … - ряд натуральных чисел)

<u>Целые числа</u> – это натуральные числа, а также НОЛЬ и числа, противоположные натуральным (ряд целых чисел … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …)

<u>Рациональные числа</u> – это числа, представимые в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m - целое число, n – натуральное число.

Ratio – отношение

Рассмотрим квадрат ABCD со стороной, равной 1 (см. рис. 3).
В прямоугольном треугольнике ADC по теореме Пифагора:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AC^2 = 1^2 + 1^2$$

$$AC^2 = 2$$

$$AC = \sqrt{2}$$

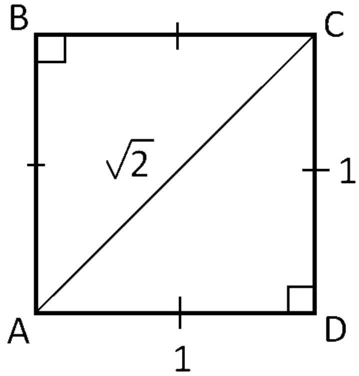


Рисунок 3. Квадрат со стороной, равной 1

Мы видим, что число $\sqrt{2}$ реально существует, т.к. выражает длину диагонали квадрата со стороной, равной 1.

Мы помним, что иррациональное число выражается бесконечной непериодической десятичной дробью, что не позволяет записать точный результат измерения диагонали АС рассматриваемого квадрата. Пифагорейцы знали и этот факт, но попытались его утаить. Ведь они считали числа священными сущностями и верили, что всё в мире может быть измерено, что всё имеет численную природу, поэтому идея невыразимого числа противоречила самой основе их философии.

Также нам известно, что рациональные числа представляются в виде бесконечных периодических десятичных дробей. Если каждой цифре рационального числа, записанного в виде бесконечной периодической десятичной дроби, поставить в соответствии ноту в определённой тональности, то музыка этого числа будет содержать повторяющуюся мелодию, как например, повторение нот, соответствующих цифрам периода дроби 0,(538461), что равно дроби $\frac{7}{13}$. Если же аналогично поступить с цифрами числа $\Phi \approx 1{,}618$, а на рисунке 4 дано 993 знака после запятой у этого числа, то повторений какой-то одной мелодии в музыке этого числа уже не будет.

БОЛЕЕ ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ Ф

Для любителей точности мы приводим значение золотого сечения с 993 знаками после запятой!

1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544
8622705260462818902449707207204189391137484754088075386891752
1266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383
2266131992829026788067520876689250171169620703222104321626954
8626296313614438149758701220340805887954454749246185695364864
4492410443207713449470495658467885098743394422125448770664780
9158846074998871240076521705751797883416625624940758906970400
028121042762177111777805315317141011704666599146697987317613
560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829
77834784587822891097625003026961561700250464338243776486102
838312683303724292675263116533924731671112115881863851331620
384005222165791286675294654906811317159934323597349498509040
947621322298101726107059611645629909816290555208524790352406
020172799747175342777592778625619432082750513121815628551222
480939471234145170223735805772786160086883829523045926478780
178899219902707769038953219681986151437803149974110692608867
4296226757560523172777520353613936.

Рисунок 4. Более точное значение числа Ф

В интернете есть несколько видео, посвящённых музыке чисел π, Ф и других.

Документированная история числа Ф началась с Евклида, который в шестой книге своих знаменитых «Начал» записал следующий текст: «Разделить прямую линию в крайнем и среднем отношении значит разделить её на два таких отрезка, чтобы отношение всей линии к большему отрезку равнялось отношению большего отрезка к меньшему».

Рисунок 5. Евклид Александрийский (325 – 265 гг. до н.э.)

Следующей вехой в истории числа Ф является трактат «О божественной пропорции» францисканского монаха, живописца и математика Луки Пачоли, написанный им в 1498 году и опубликованный в 1509 году. Пачоли считал, что «религиозные службы имеют небольшую ценность, если церковь не была построена в правильной пропорции». В этой книге установлены соотношения, которые должны быть соблюдены для достижения красоты как отражения геометрии. Именно в этом трактате впервые были напечатаны рисунки Леонардо да Винчи, в том числе «Витрувианский человек», иллюстрирующий Ф, который с тех пор цитировался бесчисленное количество раз. Эта книга предоставила теоретические основы для самых влиятельных искусств западной культуры. В пятой главе своего трактата Пачоли указывает пять причин, по которым он считает уместным называть соотношение отрезков, разделённых в крайнем и среднем отношении, «божественной пропорцией». Он проводит соответствие между числом Ф и божественными ипостасями, проявлениями и атрибутами, а также невозможностью дать определение Богу и открыть его через слова, и невозможностью обозначить константу гармоничности понятным числом, каким-либо рациональным количеством. Константа гармоничности всегда остаётся скрытой и тайной, поэтому называется математиками иррациональной.

Рисунок 6. Лука Пачоли (1447 - 1517)

Впервые константа гармоничности была названа «Фи» в начале 20-го века. Американский математик Марк Барр предложил использовать первую букву имени древнегреческого архитектора и скульптора Фидия для обозначения золотого сечения. Фидий – это архитектор Парфенона в Афинах.

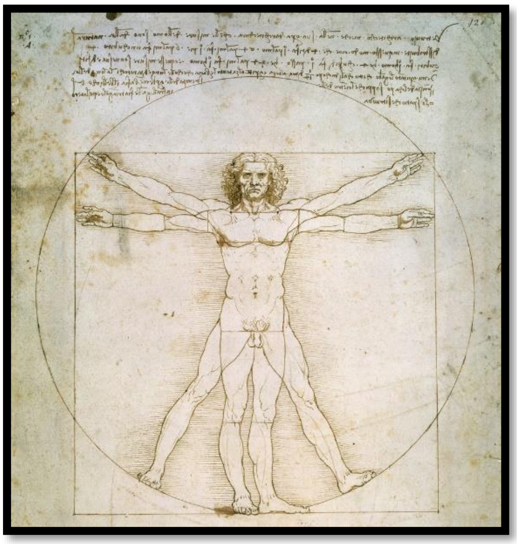
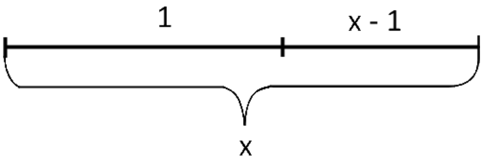


Рисунок 7. Витрувианский человек Леонардо да Винчи

Произведём расчёт числа Ф по Евклиду. Возьмём отрезок произвольной длины x и разделим его в золотом отношении.



Примем бо́льшую часть отрезка за 1, тогда меньшая часть будет равна x – 1. Составим уравнение и решим его:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

$$x \times (x-1) = 1 \times 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$$

$$D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

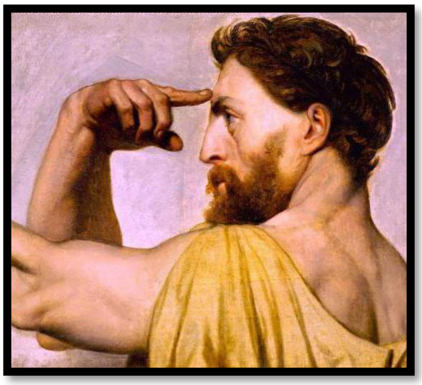


Рисунок 8. Фидий (ок.490 до н.э. – ок.430 до н.э.)

Берём только положительный корень, т.к. он выражает собой длину отрезка. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

$$\boxed{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618}$$ Ф – иррациональное число

Число Ф обладает двумя удивительными свойствами:

1. Величина, обратная Ф, равна Ф-1: $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ $\quad$ В самом деле, $\frac{1}{\Phi} = 0{,}61803\ldots$

2. Каждая степень Ф с натуральным показателем равна сумме двух предыдущих степеней:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = 2\Phi + 1 + \Phi + 1 = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = 3\Phi + 2 + 2\Phi + 1 = 5\Phi + 3$$
$$\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5$$
$$\Phi^7 = \Phi^6 + \Phi^5 = 13\Phi + 8$$
$$\ldots$$

Обратим внимание на правые части в цепочке степеней, в них стоят двучлены. Внимательно рассмотрим коэффициенты перед Ф и свободные члены в этих двучленах. Мы замечаем, что и коэффициенты перед Ф и свободные члены являются числами одной последовательности, так называемой последовательности Фибоначчи.

Мы вернёмся к этому свойству числа Ф немного позже, а сейчас познакомимся с новыми понятиями: с понятиями алгебраических и трансцендентных чисел.

<u>Определение.</u> Числа, которые являются корнями полиномиального уравнения с целыми коэффициентами, называются алгебраическими.

Полиномиальное уравнение – это уравнение вида P(x) = 0, где P(x) – полином, т.е. многочлен степени большей или равной двум. Чаще всего у него больше двух членов.

Тогда, помня о том, что Ф – это корень квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, мы заключаем, что Ф – это алгебраическое иррациональное число.

Две другие мировые константы **e** и $\boldsymbol{\pi}$ – трансцендентные числа, ибо не существует ни одного полиномиального уравнения с целочисленными коэффициентами, корнями которого они бы являлись. Этот факт, особенно про $\boldsymbol{\pi}$, известен был ещё очень давно, но доказан лишь в 19 веке: в 1873 году французский математик Шарль Эрмит доказал трансцендентность **e**, а в 1882 году немецкий математик Фердинанд фон Линдеман доказал трансцендентность $\boldsymbol{\pi}$.

Помимо Ф, т.е. золотого сечения, существуют и другие металлические сечения, все они определяются как положительные корни квадратных уравнений вида:

$$x^2 - px - q = 0, \quad ★$$

где ***p*** и ***q*** – натуральные числа.

Золотое сечение мы получаем при p = 1 и q = 1.

При p = 2 и q = 1 мы получаем серебряное сечение как положительный корень квадратного уравнения:

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$
$$1 + \sqrt{2} = 2{,}4142135\ldots - \text{серебряное сечение.}$$

Серебряное сечение широко применяется в архитектуре православных храмов. Так, например, врата храмов являются серебряными прямоугольниками с форматным отношением $1+\sqrt{2}$ (т.е. отношение длины прямоугольника к его ширине равно $1+\sqrt{2}$).

При p = 3 и q = 1 (заметьте, что в уравнении ★ пока изменяется только коэффициент p, свободный член q не изменяется) мы получаем бронзовое сечение:

$$x^2-3x-1=0$$
$$D=(-3)^2-4\times1\times(-1)=9+4=13$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$
$$\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3{,}302775\ldots-\text{бронзовое сечение.}$$

Рисунок 9. Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1170 - 1250)

Следующая важная страница в истории константы гармоничности связана с Леонардо Пизанским по прозвищу Фибоначчи, что переводится как «сын благонамеренного».

Фибоначчи пришёл в математику из торговли, его отец был купцом с международными связями. Деловые поездки в северную Африку дали ему возможность познакомиться с математическими работами мусульманских учёных, в том числе с индо-арабской системой счисления, заимствованной из Азии. Леонардо сразу понял огромные преимущества этой системы над римскими цифрами, стал её убеждённым сторонником и начал распространять её по всей Европе. Именно благодаря Фибоначчи, западная культура сделала этот важный шаг вперёд. Знаменитая «Книга абака», изданная Фибоначчи в 1202 году, посвящена индо-арабской системе счисления. Однако спор между абацистами и алгористами, начатый Фибоначчи, продолжался ещё три века после него, как видно из гравюры 1504 года (см. рис.10), и всё-таки завершился победой алгористов.

Рисунок 10. Гравюра 1504 г. из энциклопедии Margarita Philosophica Грегора Рейша иллюстрирует спор между абацистами (справа) и алгористами (слева).

«Книга абака» включала в себя несколько удивительных математических задач, в том числе задачу о кроликах.

Рисунок 11. «Книга абака» Леонардо Пизанского (Фибоначчи)

Знаменитая задача Фибоначчи о размножении кроликов

В начале января пару новорождённых кроликов (самца и самку) поместили в загончик, огороженный со всех сторон. Сколько пар кроликов они произведут к началу следующего года? Необходимо учесть такие условия:

- Кролики достигают половой зрелости через два месяца после своего рождения, то есть к началу третьего месяца жизни.

- В начале каждого месяца каждая половозрелая пара даёт жизнь только одной паре.

- Животные всегда рождаются парами «одна самка + один самец».

Кролики бессмертны, их не могут съесть хищники.

поколение / месяц	пер-вое	второе	третье	чет-вертое	пятое	ше-стое	Итого
январь	1						1
февраль	1						1
март	1	1					2
апрель	1	2					3
май	1	3	1				5
июнь	1	4	3				8
июль	1	5	6	1			13
август	1	6	10	4			21
сентябрь	1	7	15	10	1		34
октябрь	1	8	21	20	5		55
ноябрь	1	9	28	35	15	1	89
декабрь	1	10	36	56	35	6	144

Как истинный бизнесмен, Фибоначчи для решения этой задачи составил таблицу (см. рис.12). В ней он записал рост популяции кроликов по месяцам и по поколениям и в крайнем правом столбце «итого» подсчитал число пар в конце каждого месяца. Именно эти числа из правого столбца таблицы и составили знаменитую последовательность Фибоначчи.

Рисунок 12. Таблица роста популяции кроликов

Посмотрим на этот ряд чисел:

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; \ldots$$

Заметим, что $a_1=1$, $a_2=1$, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, что записывается с помощью рекуррентной формулы:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n > 2)$$

Вспомним второе свойство числа Ф:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = 2\Phi + 1 + \Phi + 1 = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = 3\Phi + 2 + 2\Phi + 1 = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = \Phi^6 + \Phi^5 = 13\Phi + 8$$

…

Ещё раз посмотрим на коэффициенты перед Ф и свободные члены в двучленах, стоящих в правых частях равенств. Отметим, что все они - члены последовательности Фибоначчи. Если взять два соседних числа из этой последовательности и разделить последующее на предыдущее, т.е. большее на меньшее, то мы получим число, близкое по своему значению к Ф.

Сделаем это с несколькими парами соседних чисел из последовательности Фибоначчи, а результаты этих вычислений занесём в таблицу.

позиция	число	a_n/a_{n-1}	отличие от Φ
1	1		
2	1	1,000000000000000	-0,618033988749895
3	2	2,000000000000000	+0,381966011250105
4	3	1,500000000000000	-0,118033988749895
5	5	1,666666666666667	+0,048632677916772
6	8	1,600000000000000	-0,018033988749895
7	13	1,625000000000000	+0,006966011250105
8	21	1,615384615384615	-0,002649373365279
9	34	1,619047619047619	+0,001013630297724
10	55	1,617647058823529	-0,000386929926365
11	89	1,618181818181818	+0,000147829431923
12	144	1,617977528089888	-0,000056460660007
13	233	1,618055555555556	+0,000021566805661
14	377	1,618025751072961	-0,000008237676933
15	610	1,618037135278515	+0,000003146528620
16	987	1,618032786885246	-0,000001201864649
17	1,597	1,618034447821682	+0,000000459071787
18	2,584	1,618033813400125	-0,000000175349770
19	4,181	1,618034055727554	+0,000000066977659
20	6,765	1,618033963166707	-0,000000025583188

Рисунок 13. Таблица результатов вычислений частного двух соседних чисел последовательности Фибоначчи

В таблице (см. рис.13) показано, что чем больше номера членов последовательности, тем меньше отличие от Ф у отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Значит, можно утверждать, что предел отношений соседних членов последовательности Фибоначчи равен Ф.

$$lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi$$

Это второй математический способ дать определение константы гармоничности.

Пифагоровы тройки и последовательность Фибоначчи

Рассмотрим способ получения пифагоровой тройки из четырёх последовательных чисел ряда Фибоначчи.

Вспомним теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$ (см. рис.13).

Пифагоровы тройки – это три целых числа (a,b,c), удовлетворяющих условию $c^2 = a^2 + b^2$.

Возьмём любые четыре последовательных числа из последовательности Фибоначчи, например, 2,3,5,8.

Построим пифагорову тройку следующим образом:

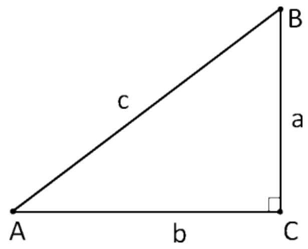


Рисунок 14. Прямоугольный треугольник

1. Вычислим произведение двух крайних чисел: 2 x 8 = 16.

2. Найдём удвоенное произведение двух средних чисел 2 x (3 x 5) = 30.

3. Найдём сумму квадратов двух средних чисел: $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

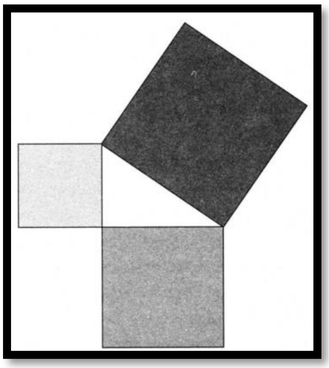


Рисунок 15. Теорема Пифагора

(16,30,34) – пифагорова тройка.

$$34^2 = 16^2 + 30^2$$

$$1156 = 256 + 900$$

$$1156 = 1156$$

Вот ещё несколько известных пифагоровых троек:

(3, 4, 5); (6, 8, 10); (5, 12, 13); (9, 12, 15).

Деление отрезка в золотом отношении

Как построить на отрезке ту самую точку X, которая разделила бы его в золотом отношении? Опустим анализ и доказательство построения. Воспроизведём только этапы самого построения.

Нам дан отрезок AB произвольной длины ***a***.

Необходимо построить т. X ∈ AB, что $\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}$.

Построение:

1. Строим прямоугольный треугольник ABC с катетами ***AB = a***, ***BC = a/2***;
2. Ставим ножку циркуля в точку C и проводим циркулем дугу окружности с центром в точке C и радиусом ***a/2***. Она пересечёт гипотенузу AC в точке S;
3. Ставим ножку циркуля в точку A и проводим циркулем дугу окружности с центром в точке A и радиусом AS. Эта дуга пересечёт отрезок AB в искомой точке X.

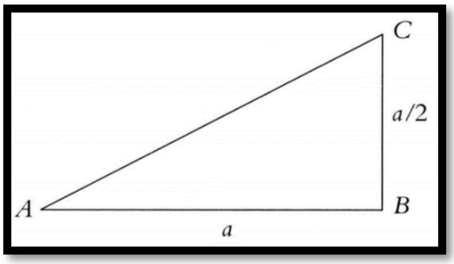


Рисунок 18. Этап 1 построения

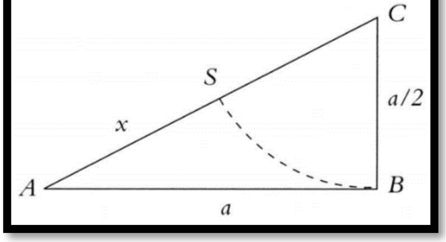


Рисунок 17. Этап 2 построения

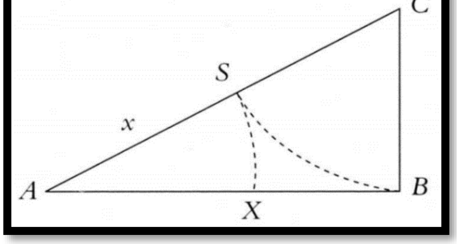


Рисунок 16. Этап 3 построения

«Золотой» прямоугольник

Рисунок 19. «Золотой» прямоугольник

Определение. Прямоугольник с соотношением сторон, равным Ф, называется «золотым».

$$\frac{m}{n} = \Phi,$$

где $\frac{m}{n}$ – форматное отношение прямоугольника. У квадрата оно равно 1.

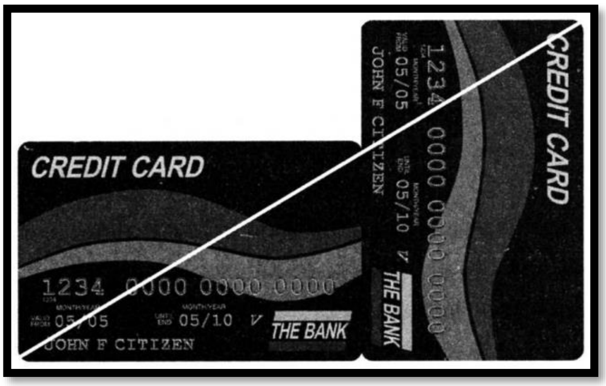


Рисунок 20. Эксперимент с двумя кредитными картами

Кредитные карточки – «золотые» прямоугольники. Проведём эксперимент с двумя кредитными картами: положим одну горизонтально, а другую вертикально так, как показано на рисунке 20, чтобы их нижние стороны лежали на одной прямой. Если в горизонтальной карте провести восходящую диагональ и продолжить её, то она пройдёт в точности через правый верхний угол вертикальной карты. Это свойство характерно для двух «золотых» прямоугольников одного размера.

В 1876 году немецкий экспериментальный психолог Густав Теодор Фехнер провёл такой эксперимент: он предложил испытуемым выбрать из четырёх предложенных прямоугольников (см. рис.22), тот, который им больше нравится. Вы тоже можете сейчас выбрать один из прямоугольников и запомнить его расположение.

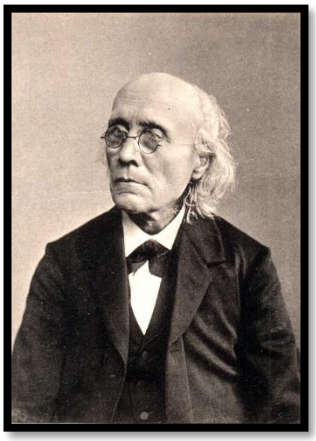


Рисунок 21. Густав Теодор Фехнер (1801 – 1887)

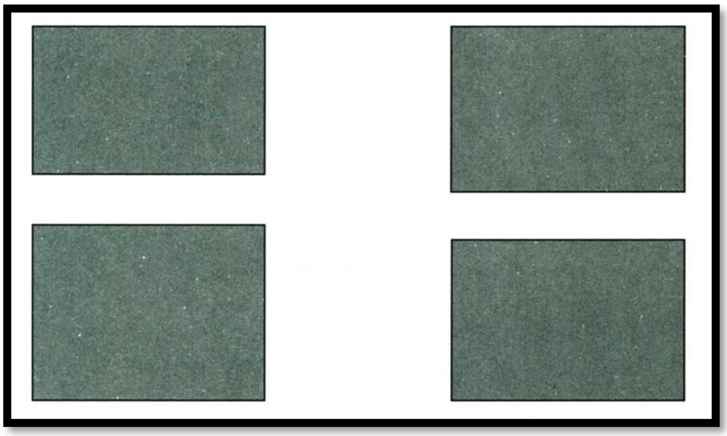


Рисунок 22. Прямоугольники из эксперимента Г.Т. Фехнера

Рисунок 23. Прямоугольники из эксперимента Фехнера с их форматным отношением

Большинство испытуемых из той «фокус-группы» выбрали правый нижний прямоугольник. Этот результат объясняется золотыми пропорциями выбранного прямоугольника.

Если Вы тоже выбрали именно его, то Вы разделяете мнение величайших художников и архитекторов о том, что «золотые» прямоугольники особенно приятны глазу.

В теории золотого сечения важным является понятие гномона. Определение ему дал Герон Александрийский, имя которого носит формула площади треугольника.

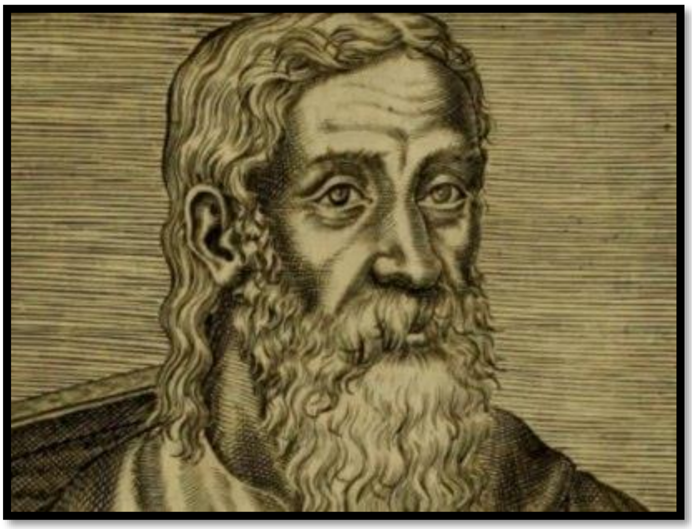


Рисунок 24. Герон Александрийский (10 – 70 гг.)

Гномон – это фигура, которая будучи добавлена к другой фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной.

Если к «золотому» прямоугольнику с длиной M и шириной m пририсовать квадрат со стороной M, то получится снова «золотой» прямоугольник с шириной M и длиной m+M.

Гномон «золотого» прямоугольника представляет собой квадрат со стороной, равной длине «золотого» прямоугольника.

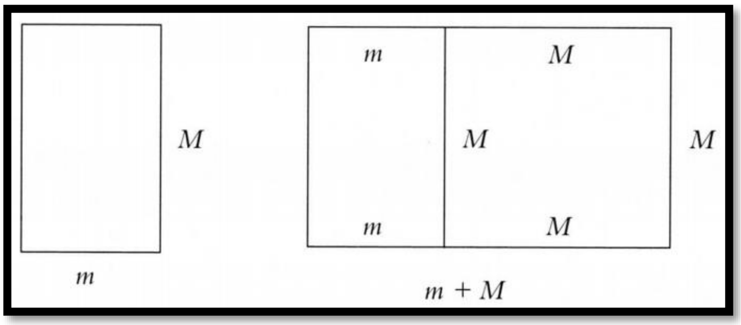


Рисунок 25. «Золотой» прямоугольник и его гномон

«Золотая» спираль

Рассмотрим рисунок 26. На нём изображён большой «золотой» прямоугольник. Если от этого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной ширине исходного прямоугольника, то получится новый «золотой» прямоугольник, для которого отрезанный квадрат был гномоном. В этом квадрате соединим две противоположные вершины циркулем, проведя дугу окружности с центром в точке 1 и радиусом, равным стороне квадрата-гномона. Если продолжить отсекать квадраты-гномоны от «золотых» прямоугольников и соединять дугой в них две противоположные вершины, то получим «золотую» спираль. О ней мы ещё вспомним во время нашей лекции.

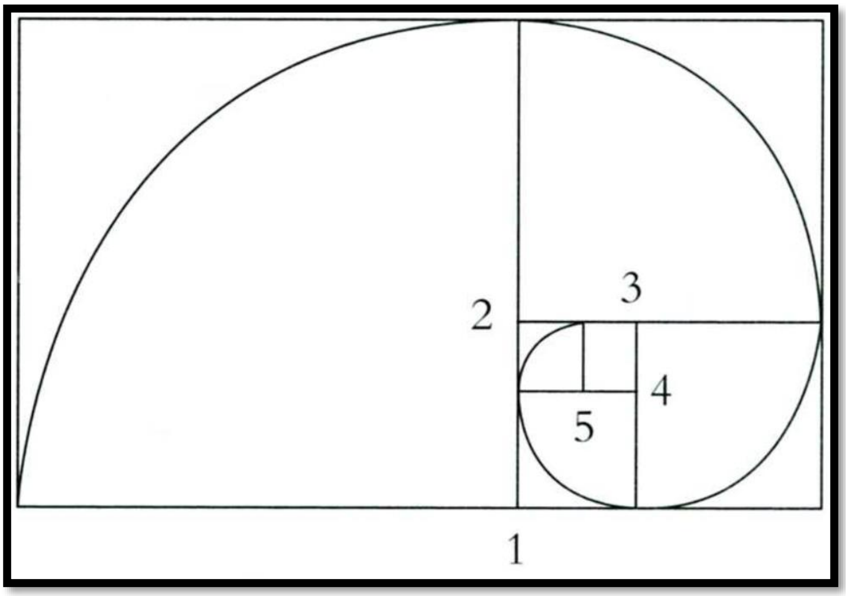


Рисунок 26. «Золотая» спираль

«Золотой» треугольник

Помимо «золотого» прямоугольника и «золотой» спирали существует и «золотой» треугольник. Это равнобедренный треугольник с углами 36^0, 72^0 и 72^0 (см. рис.27).

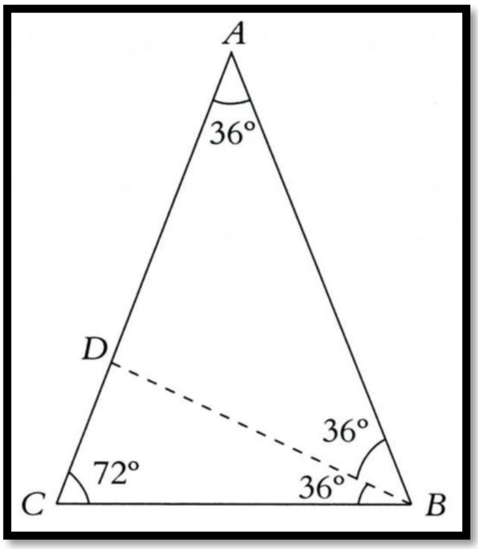


Рисунок 27. «Золотой» треугольник

Если в нём провести биссектрису угла B, то получатся два треугольника. Треугольник CBD будет снова «золотым», в нём углы 36^0, 72^0 и 72^0. А треугольник ABD имеет углы другие, а именно 36^0, 36^0 и 108^0. Такой треугольник называется «золотым» гномоном. Треугольник ABD – «золотой» гномон для треугольника CBD.

Если продолжить процедуру отрезания «золотых» гномонов и соединять в них вершины дугой окружности, как показано на рисунке 28, то получим «золотую» спираль. Она снова будет сходиться к одной точке, как и в случае с «золотыми» прямоугольниками.

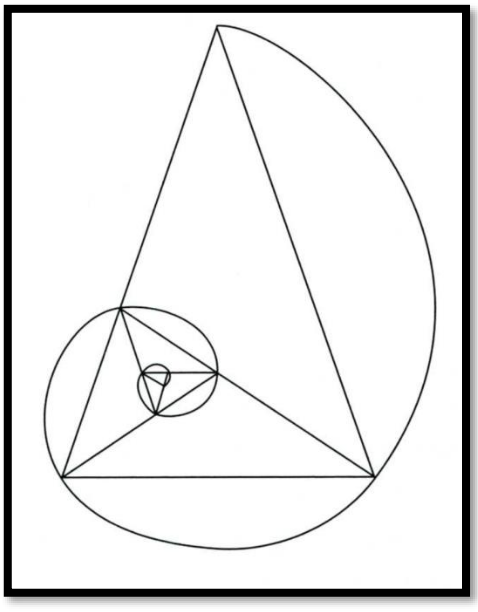


Рисунок 28. Получение «золотой» спирали из «золотого» треугольника

Циркуль Фибоначчи

Мерилом гармонии мира считается «золотой» циркуль или циркуль Фибоначчи. Он служит для построения отрезков, разделённых в «золотом» отношении, и для проверки такой пропорции.

«Золотой» циркуль легко сделать самостоятельно. Вот простой способ: возьмём две заострённые на концах полоски картона или фанеры шириной 2 см и длиной 34 см, проделаем в них отверстия на расстоянии 13 см от одного из концов. Соединим кнопкой обе

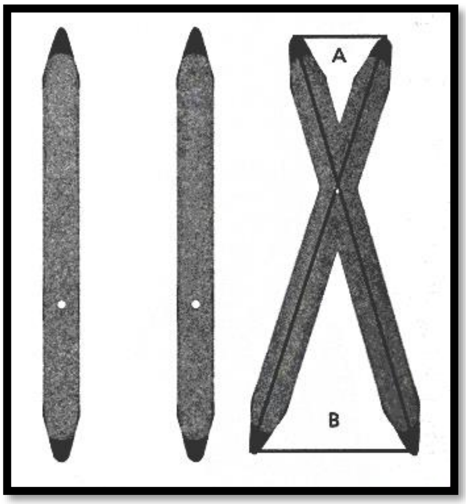


Рисунок 29. «Золотой» циркуль 1

полоски через эти отверстия так, чтобы они могли поворачиваться. Раздвинув полоски, мы получим два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами 21 и 13 см соответственно. Так как это два последовательных числа из последовательности Фибоначчи, то их отношение близко к Ф. Отношение расстояния между длинными ножками циркуля к расстоянию между короткими ножками циркуля также будет Ф.

Циркуль очень прост в использовании. Чтобы убедиться, что два отрезка находятся в «золотой» пропорции, нужно раздвинуть короткие ножки циркуля на расстояние, равное длине меньшего отрезка, и, не меняя положения циркуля, измерить длинными ножками длину большего отрезка. Если его длина равна расстоянию между длинными ножками циркуля, то два отрезка находятся в «золотой» пропорции.

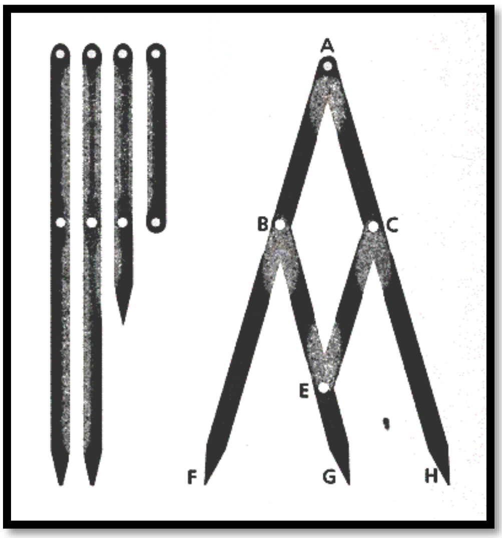


Рисунок 30. «Золотой» циркуль 2

Второй способ построения «золотого» циркуля более сложен, но более точен. Нам потребуются четыре узких полоски шириной в 1 см. Две из них длиной 34 см, одна – 21 см, а четвёртая – 13 см. Проделаем два отверстия в каждой из них: одно на конце полоски, а второе - на расстоянии 13 см, как показано на рисунке 30. Затем мы соединим полоски так, как показано на этом рисунке. У нас получились следующие отрезки:

AF = AH = 34 см

BG = 21 см

AB = AC = BE = CE = 13 см

EG = 8 см.

Все эти числа – члены последовательности Фибоначчи. При работе с циркулем отношение FG к GH всегда будет очень близко к Ф. Если мы поставим ножки F и H циркуля на конце отрезка (помним, что его длина должна быть до 68 см), точка G покажет место, где отрезок делится на две части M и m такие, что M/m = Ф.

<u>Золотое сечение в живописи</u>

В эпоху Возрождения поиск идеальных пропорций свёл художников и учёных вместе. «Первое требование для художника – это знание геометрии» - крылатое выражение из «Трактата о живописи» (1435 г.) Леона Баттисты Альберти.

Леонардо да Винчи также был теоретиком живописи и твёрдым сторонником её единства с математикой. Его «Трактат о живописи» (1498 г.) начинается с фразы: «Пусть никто, не будучи математиком, не дерзнёт читать мои труды».

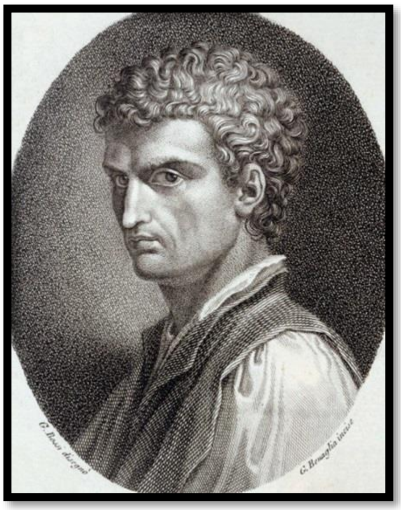


Рисунок 31. Леон Баттиста Альберти (14 февраля 1404 г. - 25 апреля 1472 г.)

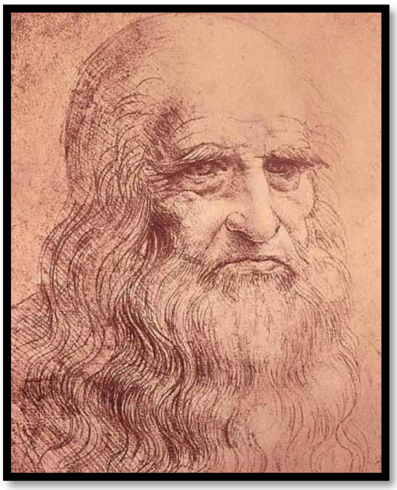


Рисунок 33. Леонардо да Винчи (15 апреля 1452 г. - 2 мая 1519 г.)

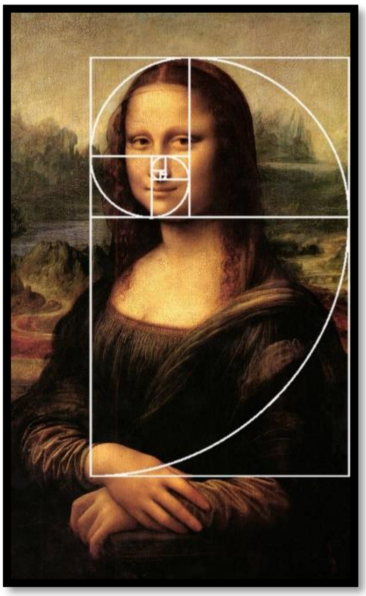


Рисунок 34. «Мона Лиза» или «Джоконда» Леонардо да Винчи 1503 г.

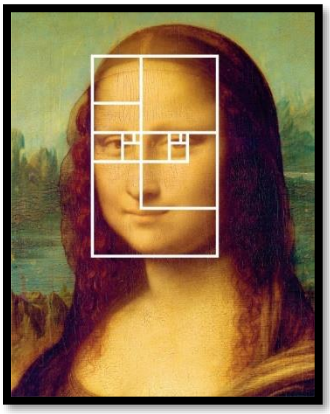


Рисунок 32. «Мона Лиза» или «Джоконда» Леонардо да Винчи 1503 г.

Портрет Моны Лизы построен на золотом сечении. Исследования показали, что её лицо и в целом и в деталях обрамлено элегантной последовательностью «золотых» прямоугольников разных размеров.

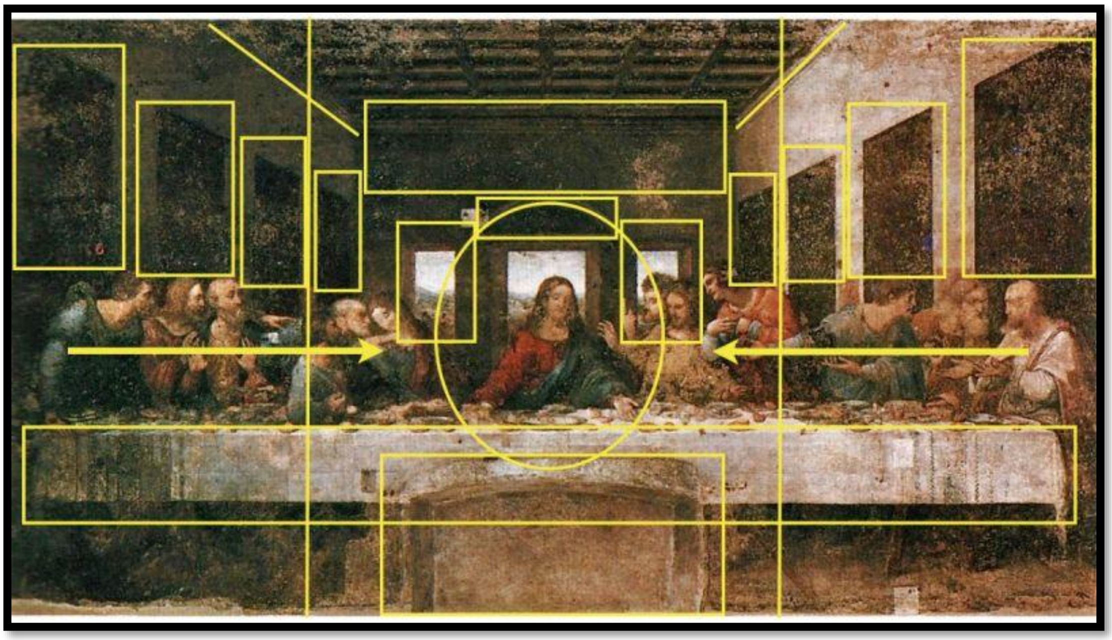


Рисунок 35. «Тайная Вечеря» Леонардо да Винчи (1495 г.–1498 г.)

Использование «золотых» прямоугольников и «золотой» спирали помогало художникам в определении пространства картины и в расположении человеческих фигур.

Хотя у нас нет прямых свидетельств того, что Леонардо использовал золотое сечение, композиции его работ, таких как «Тайная Вечеря», содержит поразительное множество золотых пропорций, особенно «золотых» прямоугольников. В «Тайной Вечере» «золотые» прямоугольники определяют как размеры картины, так и положение Христа и Его учеников. Стены комнаты и окна на заднем плане следуют правилу золотого сечения.

Наши русские художники также применяли золотое сечение в создании композиции своих полотен. Александр Андреевич Иванов при написании картины «Явление Христа народу» (1837 - 1857) очень много и серьёзно обращался к математике, помимо золотого сечения ещё использовал правило третей.

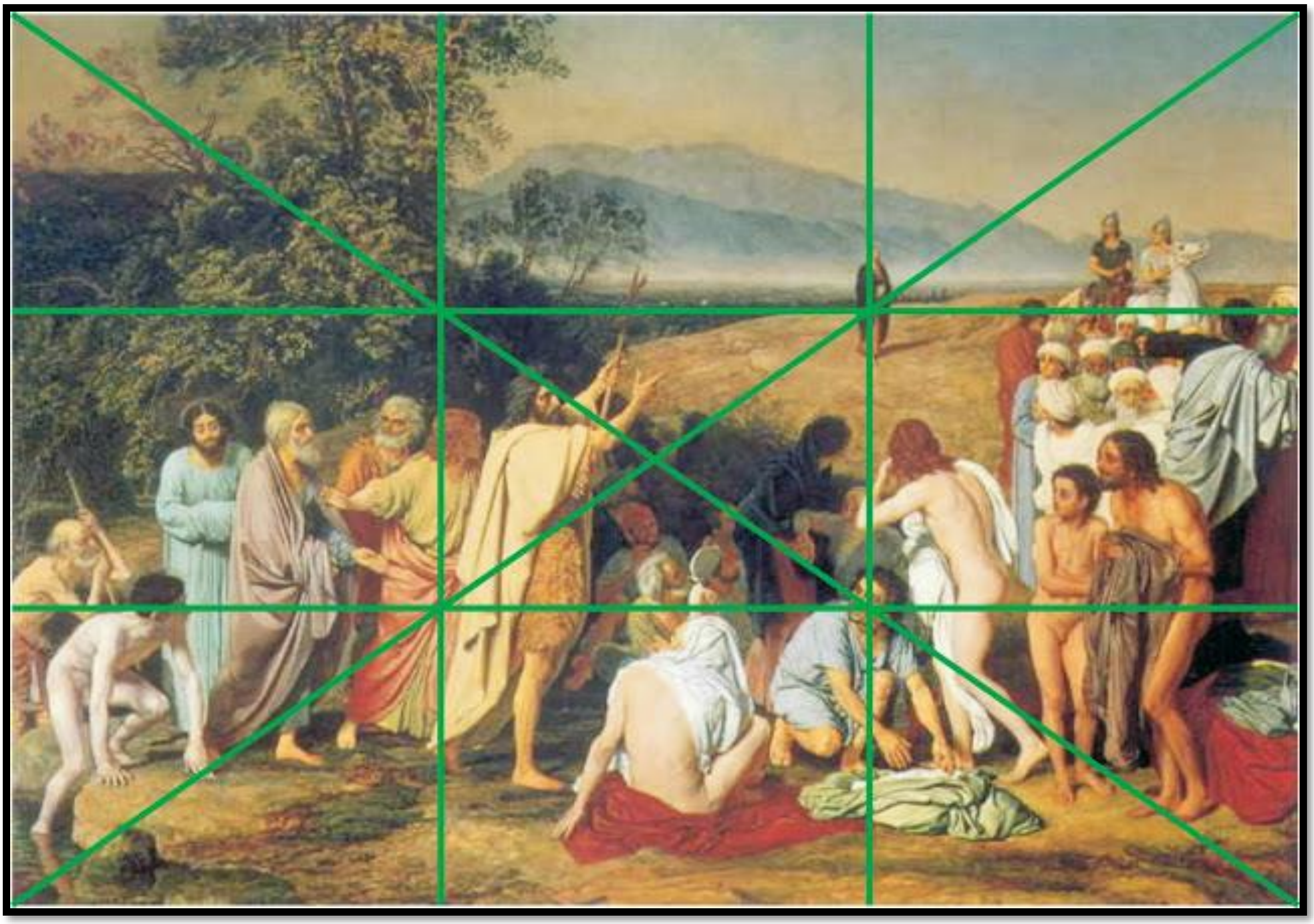


Рисунок 36 «Явление Христа народу» (1837 - 1857) А.А. Иванов

Самые главные моменты сюжета картины написаны в соответствии с константой гармоничности. Например, Иоанн Креститель на полотне расположен так, что его фигура делит длину прямоугольника в золотом отношении. Фигура Христа находится на восходящей диагонали, в главной её точке по правилу третей, что создаёт в картине эффект равновесия, спокойствия и гармоничности.

Золотое сечение в архитектуре

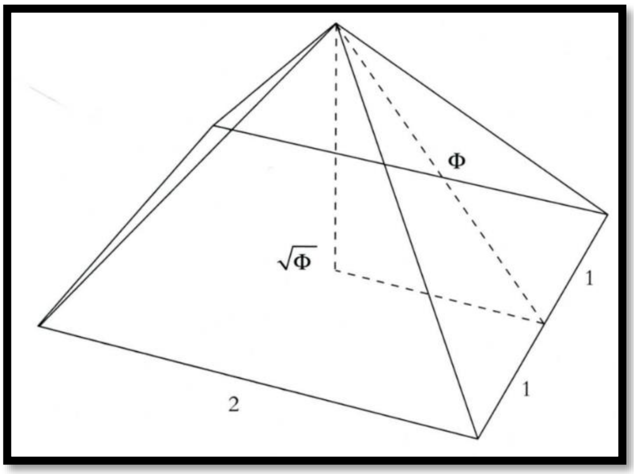


Рисунок 37. Великая пирамида в Гизе и число Ф

Золотое сечение встречается в архитектуре со времён древних египтян, хотя мы не можем с уверенностью сказать, что такие пропорции использовались умышленно. Например, высота и основание Великой Пирамиды имеют непосредственное отношение к Ф.

В самом деле, если сторону основания великой пирамиды в Гизе принять за 2, тогда апофема пирамиды, т.е. высота её боковой грани, будет равна Ф, а высота самой пирамиды $\sqrt{\Phi}$.

Рисунок 38. Врата Солнца в Боливии (1500 г. до н.э.)

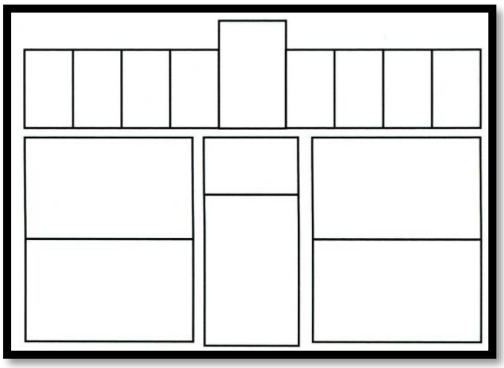


Рисунок 39. «Золотые» прямоугольники во Вратах Солнца в Боливии

Другие цивилизации, далёкие от классической культуры, похоже, тоже ценили золотые пропорции. Рядом с озером Титикака, недалеко от Ла-Паса, столицы Боливии, находятся Врата Солнца – каменная арка доинковской эпохи с пропорциями, которые полностью диктуются золотым сечением. Размеры сооружения основаны на «золотых» прямоугольниках.

Университет Саламанки – первое учебное заведение в Европе, известное под названием «университет» - является самым старым университетом в Испании (основан в 1218 г.). Его фасад был перестроен в 15 веке в стиле платереско, который был характерен для эпохи испанского Возрождения и является смешением мавританского стиля и фламандской готики. Золотое сечение лежит в основе пропорций этого здания, а фасад университета содержит большой «золотой» прямоугольник.

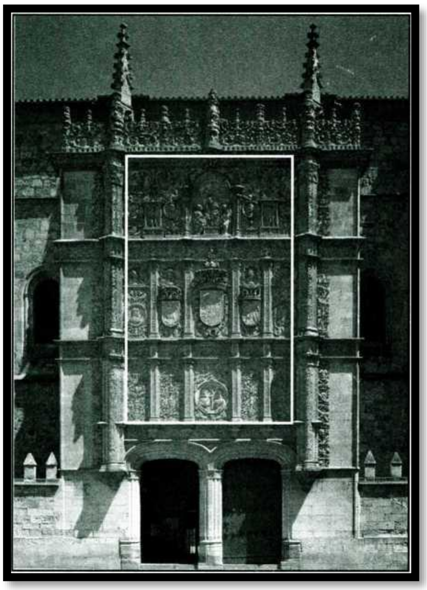


Рисунок 40. Университет Саламанки (1218г.)

Рисунок 41. Здание ООН в Нью-Йорке (1948 г.)

Фасад здания ООН состоит из «золотых» прямоугольников. В его создании участвовал французский архитектор швейцарского происхождения Ле Корбюзье. Рекомендую вам посетить с экскурсией Мясницкую улицу в Москве, найти на ней дом №39. Этот дом построил Ле Корбюзье. В этом доме сейчас находится Росстат, а раньше он назывался домом Центросоюза. О Ле Корбюзье в интернете есть очень интересная лекция, читает которую Анна Юлиановна Броновицкая, историк архитектуры, директор по исследованиям Института модернизма, преподаватель Московской архитектурной школы (МАРШ). Рекомендую посмотреть видеозапись этой лекции (1).

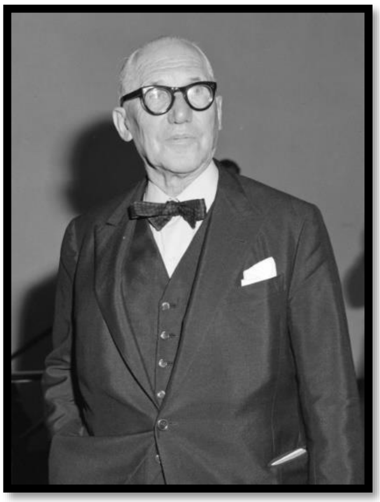


Рисунок 42. Ле Корбюзье (6 октября 1887 г. - 27 августа 1965 г.)

Золотое сечение в природе

Золотое сечение в природе встречается повсеместно. Так, например, раковины моллюсков часто имеют форму «золотой» спирали. Самый характерный пример – это раковина наутилуса (Nautilus pompilius). Раковина увеличивается с добавлением внутренних камер, каждая из которых больше, чем предыдущая, но форма раковины остаётся прежней. Спиральная структура наутилуса напоминает по форме водовороты в джакузи или при спускании воды в ванне. Или, в более широком масштабе, спиральные рукава некоторых галактик, в том числе и нашей галактики Млечный Путь, разворачиваются по «золотой» спирали.

Рисунок 44. Раковина маллюска (Nautilus pompilius)

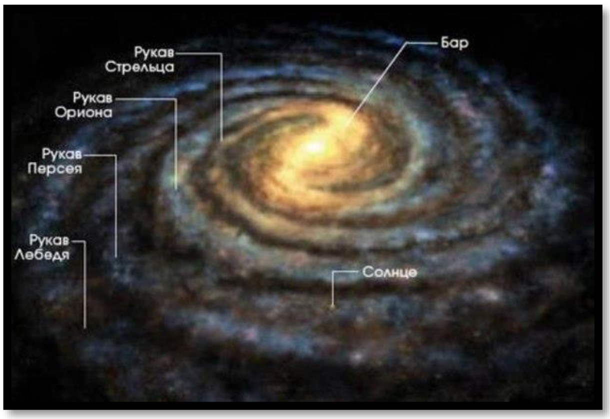


Рисунок 43. Галактика "Млечный Путь"

Золотое сечение наблюдается в строении листа. На рис. 45 даны листья шершавого вяза и фигового дерева с указанием золотых пропорций.

Рисунок 46. Цветок ромашки

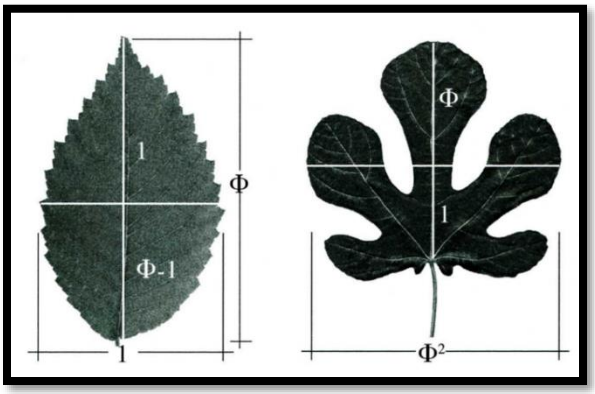


Рисунок 45. Листья шершавого вяза и фигового дерева

Число лепестков многих цветов соответствует некоторым членам последовательности Фибоначчи. Например, различные виды ромашки имеют разное количество лепестков, но это всегда числа Фибоначчи (21, 34, 55, 89).

Строгие эксперименты в ботанике доказывают, что золотая пропорция в растениях встречается часто и явно.

Музыкальные произведения делятся кульминационным моментом в золотом отношении. Об этом красиво и подробно говорит профессор Московской консерватории Иван Глебович Соколов в своей лекции №2 «Точка золотого сечения в классической музыке» из курса лекций по музыке «От Баха до наших дней», она также есть в интернете (2).

Заключение

Число Ф появилось в математике более 20 веков назад. Это древнее и прославленное число до сих пор встречается в новых областях современной науки (например, в теории фракталов). Число Ф не является отслужившей своё игрушкой, оно и сегодня продолжает играть важную роль.

Здесь наше путешествие подошло к концу. Хочется надеяться, что сам путь был столь же интересным, как и пункт назначения. Мы делали много остановок в самых разных областях: математика, живопись, архитектура, астрономия и сама природа. Мы подошли к месту, откуда открываются широкие горизонты. Впереди нас ждут новые открытия!

Лекция 2 «Правильные многогранники. Математический язык красоты»

Цель лекции: познакомить учащихся с правильными многогранниками, рассказать учащимся об их применении в науке, философии, живописи и в природе.

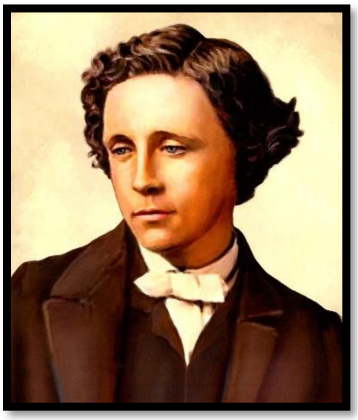


Рисунок 47. Льюис Кэрролл (1832 - 1898), английский математик и писатель

«Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук».

Льюис Кэрролл

Определение.

Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и тоже число рёбер.

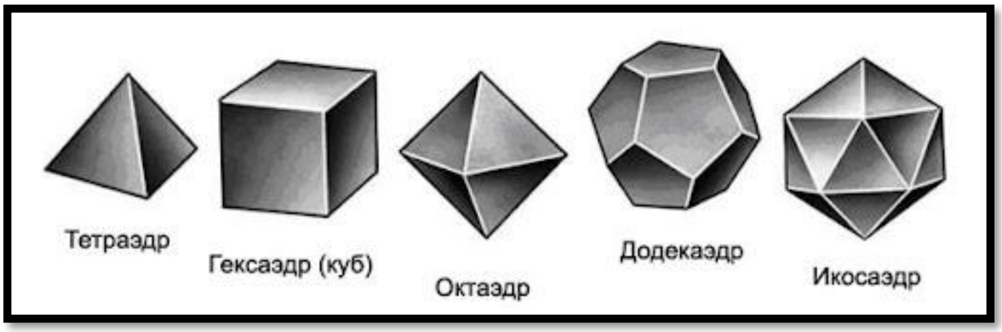


Рисунок 48. Правильные многогранники

Существует **пять** видов правильных многогранников: **тетраэдр, куб (гексаэдр), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.**

То, что каждый из них выпуклый, легко проверить экспериментально. Возьмём в руки, например, модель тетраэдра и прислоним ладонь к любой его грани. Что мы видим? Вся фигура оказалась по одну сторону от ладони. Касаясь ладонью любой грани любого правильного многогранника и мысленно проводя через ладонь плоскость, мы убеждаемся в том, что эта воображаемая плоскость нигде не разрезает ни одну из рассматриваемых фигур. Это и означает, что фигура является выпуклой.

Названия правильных многогранников пришли к нам из Древней Греции, и они дословно означают следующее: четырёхгранник (тетраэдр), шестигранник (гексаэдр), восьмигранник (октаэдр), двенадцатигранник (додекаэдр), двадцатигранник (икосаэдр).

Однако эти «тела» были известны более 3500 лет назад. Тысячи вырезанных из камня или обожжённой глины моделей этих пяти многогранников были найдены в разных местах Великобритании – от Северной Шотландии до долины Солсбери на юге Англии, в том числе возле знаменитого Стоунхенджа. Исследования показали, что этим находкам действительно более 3500 лет.

Рисунок 50. Икосаэдр в "Метрополитен-музее"

Рисунок 49. Икосаэдр в "Метрополитен-музее"

Люди с древних времён использовали правильные многогранники в своей жизни и деятельности. Куб и тетраэдр были верными слугами людей в их созидательном стремлении к строительству, а также в их разрушительной страсти к азарту. Об этом свидетельствуют нам египетские пирамиды, детские кубики и пирамидки, игральные кости. Кстати, игральные кости в древности были не только в виде куба, но и в виде икосаэдра. В Египетском зале Британского музея хранится особый выставочный экземпляр – игральная кость династии Птолемеев, имеющая форму икосаэдра. Икосаэдр, как игральную кость, можно увидеть в «Метрополитен – музее» в Нью-Йорке, США.

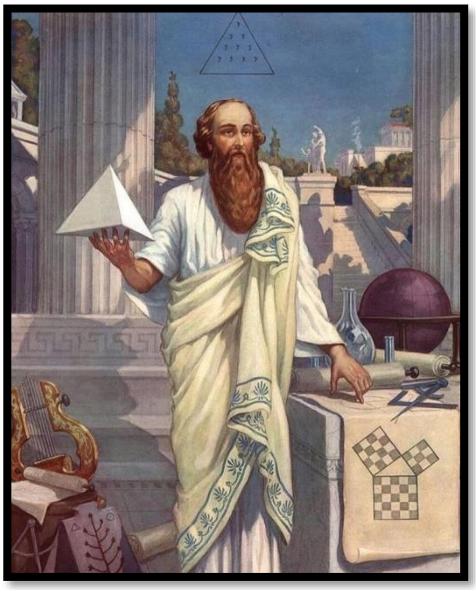


Рисунок 51. Пифагор (ок.570 - ок.490 до н.э.)

В 1968 году журнал «Знание-сила» сообщил о находке во Вьетнаме тридцати «странных предметов» в форме додекаэдра непонятного назначения и одного бронзового - во Франции. Внутри они полые. В центрах двенадцати граней «странных предметов» - круглые отверстия, причём разного диаметра, а в двадцати вершинах – сферические выпуклости. Родилось предположение о «странном предмете» как о силовой модели Земли, с различными свойствами в вершинах и центрах граней. Так, в «чёрных дырах» отверстий внутри граней этой модели, перенесённой на поверхность планеты, предполагалось исчезновение или мгновенная смерть экипажей судов и самолётов (например, в районах Бермудского треугольника и «Моря дьявола»).

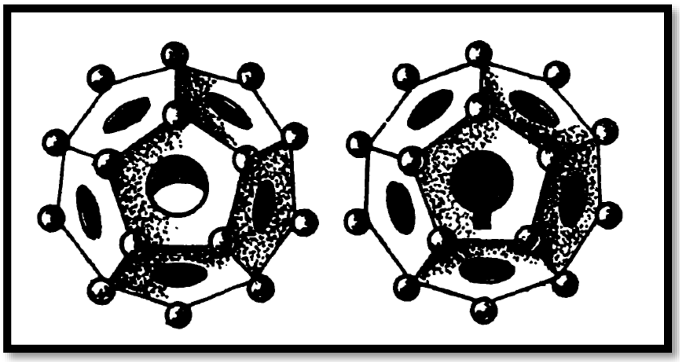


Рисунок 52. «Странный предмет»

Вот ещё один доказанный факт: додекаэдр был известен уже 2500 лет назад, как любимая игрушка этрусских детей. Это подтверждено находкой при раскопках в местечке Монте Лоффа под Падуей на севере Италии. Но и в наши дни додекаэдр востребован – именно такую форму имеют некоторые брелки и календари, у которых каждый месяц соответствует одной из двенадцати граней додекаэдра.

Октаэдр мы тоже не забудем отметить, ведь он с древних времён и до наших дней неизменно служит формой для некоторых светильников.

Правильные многогранники на протяжении всей истории волновали великие умы, привлекали к себе внимание учёных, архитекторов, художников, которых поражала красота, совершенство и гармония этих фигур.

Пифагор считал эти многогранники божественными и использовал их в своих философских сочинениях о существе мира. Пифагор считал, что сфера Вселенной возникла из додекаэдра. Многие свои знания пифагорейцы считали необходимым держать в тайне. Один из них, Гиппас, разгласил одну из тайн, первым начертив шар, покрытый двенадцатью равными пятиугольниками.

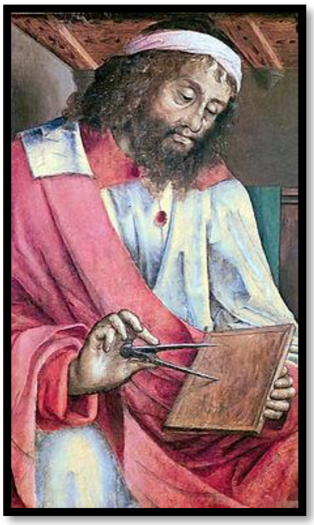


Рисунок 53. Евклид (ок.325 - до 265 до н.э.)

Евклид посвятил правильным многогранникам целую книгу, а именно тринадцатую (завершающую) книгу своих знаменитых «Начал».

Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон. Именно поэтому правильные многогранники называют также телами Платона. Они занимали видное место в философской картине мира, разрабатываемой этим великим мыслителем. Платон считал, что мир строится из четырёх «стихий» - огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих стихий имеют форму четырёх правильных многогранников. Итак, тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени; икосаэдр, как самый обтекаемый, олицетворял воду; куб – самая устойчивая из фигур – землю; а октаэдр – воздух.

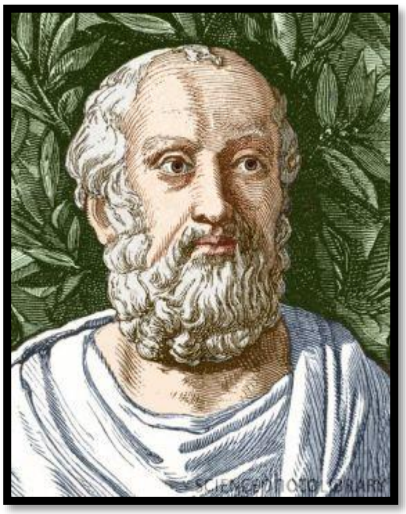


Рисунок 54. Платон (ок.428 – ок.348 до н.э.).

В наше время эту систему можно сравнить с четырьмя состояниями вещества – твёрдым, жидким, газообразным и плазменным.

Пятый многогранник – додекаэдр – воплощал в себе «всё сущее», символизировал весь мир, всё мироздание и почитался главнейшим. Уже в средние века его стали называть по латыни «пятая сущность» или **quinta essentia**, «квинта эссенция», отсюда происходит вполне современное слово «квинтэссенция», означающее всё самое главное, основное, истинную сущность чего-либо.

Додекаэдру у Платона отведено очертание Вселенной и очертание Земли как планеты. В своём сочинении «Федон» философ писал: «Земля, если взглянуть на неё сверху, похожа на мяч, сшитый из двенадцати кусков кожи и пёстро расписанный разными цветами».

Неслучайно испанский живописец Сальвадор Дали использовал этот символ в своей картине «Тайная вечеря», которая является вершиной духовных исканий художника.

Рисунок 55. Сальвадор Дали (1904-1989)

Рисунок 56. Картина Сальвадора Дали "Тайная вечеря" (1955), холст, масло. Национальная галерея искусств. Вашингтон, США.

В этом полотне воплощено философско-религиозное и эстетическое кредо Дали. Здесь «воздух», и свет, и конструкция, и сон, и явь, и надежда, и сомнение. В центре большого горизонтального (167 х 268 см) полотна изображён Христос, но в трёх ипостасях: как сын, сошедший на Землю, он сидит за столом со своими учениками, но потом мы замечаем, что он вовсе и не сидит за столом, а погружён по пояс в воду, то есть крестится водой, или Духом Святым, и тем самым воплощает вторую ипостась

Троицы, а над ним призрачно высится мужской торс – словно часть композиции «Вознесение» - возвращение к Богу – Отцу.

Апостолы изображены абсолютно симметрично относительно фигуры Христа. Они сидят с молитвенно сложенными руками и низко склонёнными к столу головами, словно поклоняются Христу или спят. Именно в этом у картины есть сходство с евангельским текстом, содержащим просьбу Христа не спать, пока он молит Бога: «Пронеси эту чашу мимо меня».

Апостольский язык «Тайной вечери» выражены тем, что вся композиция заключена в огромный додекаэдр, двенадцать граней которого (как и апостольское слово двенадцати учеников Христа) объемлют всё мироздание. Поэтому Сальвадора Дали можно считать восприемником великих традиций эпохи Возрождения, когда творили известные мастера Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер.

Леонардо да Винчи любил изготовлять из дерева каркасные модели многогранников. Когда его друг монах Лука Пачоли издал в 1509 году в Венеции книгу «О божественной пропорции» («Sectio divina»), то иллюстрациями к ней послужили 59 рисунков, сделанных Леонардо со своих моделей.

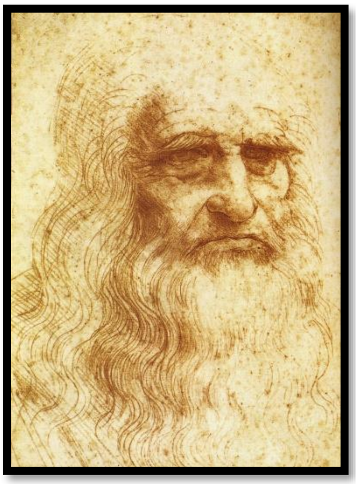


Рисунок 57. Леонардо да Винчи (1452 - 1519). Автопортрет после 1512 года

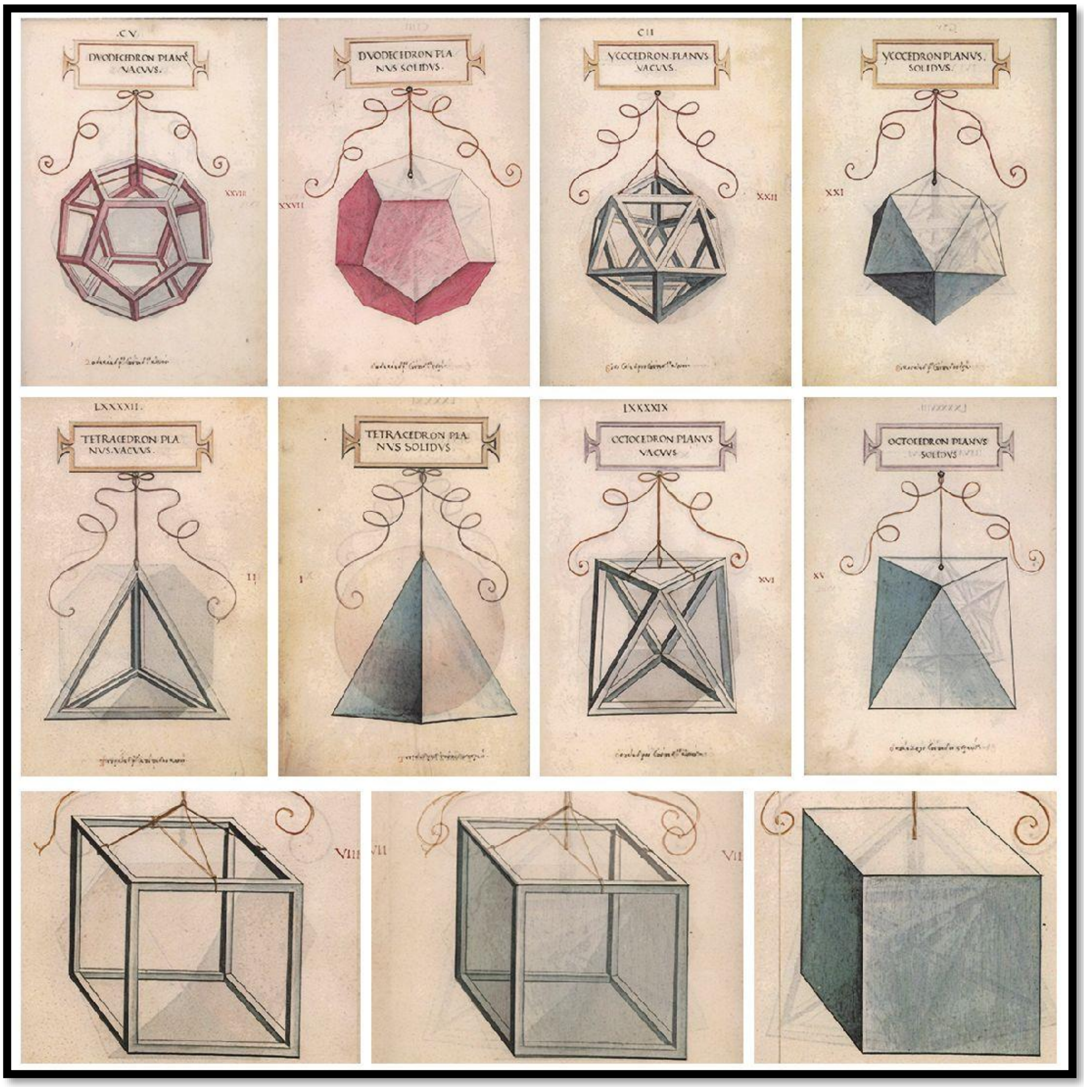


Рисунок 58. Рисунки Леонардо да Винчи для книги Луки Пачоли "О божественной пропорции"

Что же божественного нашёл в простых геометрических фигурах Лука Пачоли – человек, живший спустя два тысячелетия после Платона? Или это отзвук крылатой фразы Платона: «Бог всегда действует геометрически»?

Нет, монах Лука Пачоли мыслил реалистичнее: Бог – геометр не всегда, но в некоторых случаях. А именно тогда, когда речь идёт о золотом сечении - о таком делении отрезка на две неравные части, чтобы отношение большей части к меньшей равнялось отношению всего отрезка к большей его части.

Рисунок 60. Лука Пачоли (1447 – 1517). Портрет Луки Пачоли и его ученика (ок. 1495 - 1500)

Рисунок 59. Деление отрезка в золотом отношении

Пачоли провёл простой, но удивительный эксперимент. Мы можем его повторить: завяжем простым узлом узкую полоску бумаги и осторожно распрямим его. Мы получим правильный пятиугольник.

Пачоли отметил, что диагонали правильного пятиугольника при пересечении делятся в золотом отношении.

Воздействие божественной пропорции на человека он считал «существенным, невыразимым, чудесным, неизъяснимым, неугасимым, возвышенным, превосходнейшим, непостижимым». Лука Пачоли нашёл 13 «эффектов» этой божественной пропорции – «ради нашего спасения». Он искал их в самых совершенных созданиях математики – пяти платоновых телах, строил их из стеклянных плиток, а затем раздавал «для коллекций разных вельмож».

В главе «О двенадцатом, почти сверхъестественном свойстве» своей книги «О божественной пропорции» Лука Пачоли ведёт речь о правильном икосаэдре – платоновом теле, ограниченном двадцатью правильными треугольниками. Икосаэдр интересен тем, что в каждой вершине сходятся пять треугольников, свободные стороны которых образуют уже знакомый нам правильный пятиугольник (см. рис.62).

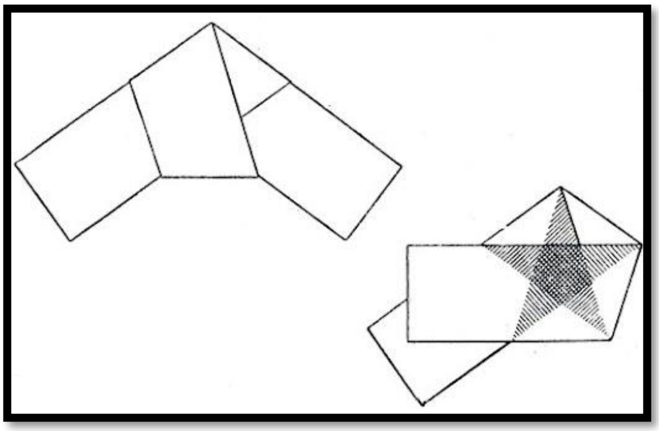


Рисунок 61. Эксперимент Луки Пачоли с полоской бумаги

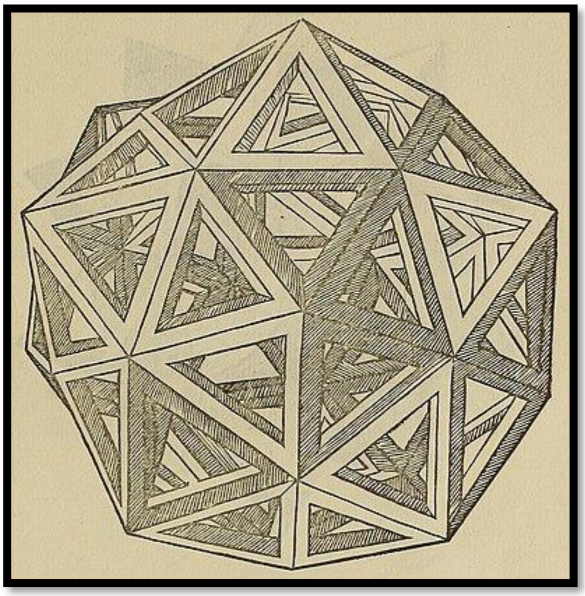


Рисунок 62. Правильный пятиугольник в икосаэдре

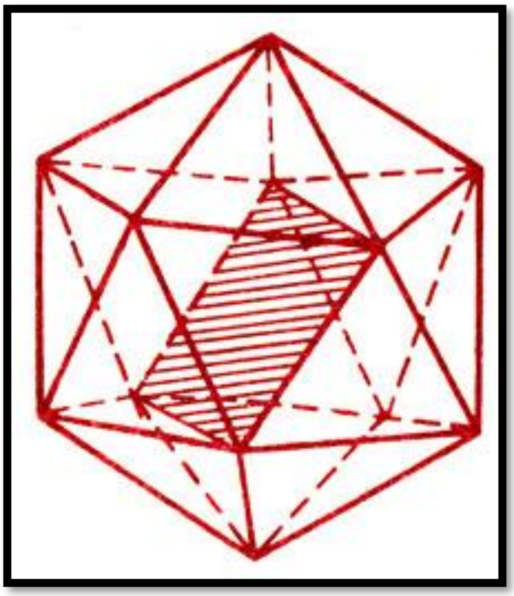


Рисунок 63. «Золотой» прямоугольник в икосаэдре

Если же соединить между собой любые два противоположных ребра икосаэдра, то получится прямоугольник (см. рис.63), тоже имеющий прямое отношение к божественной пропорции. Его большая сторона так относится к меньшей, как сумма сторон – к большей. Такой прямоугольник называется золотым.

Альбрехт Дюрер, знаменитый художник эпохи Возрождения, также увлекался геометрией. В своей гравюре «Меланхолия» он дал перспективное изображение додекаэдра. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы (перспектива – центральное проектирование).

Рисунок 64. Альбрехт Дюрер (1471 - 1528). Автопортрет 1500 года.

Рисунок 65. Альбрехт Дюрер. Гравюра "Меланхолия"

Изучая любые многогранники, естественнее всего подсчитать, сколько у них граней, сколько рёбер и вершин. Подсчитаем и мы число указанных элементов платоновых тел и зафиксируем результаты в таблице.

Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Рисунок 66. Элементы правильных многогранников

Рассматривая эту таблицу, зададимся вопросом: «Нет ли закономерности в возрастании чисел в каждом столбце?» Нет, по-видимому. Но не будем сдаваться. У нас ещё есть поле для эксперимента. Мы сравнивали числа внутри одного столбца, но можно рассмотреть сумму чисел в столбцах «число граней» и «число вершин» и сравнить её с числом в столбце «число рёбер».

<u>Вывод:</u>

Сумма числа вершин и числа граней равна числу рёбер, увеличенному на 2.

Г + В = Р + 2 (Формула Эйлера)

Мы с вами «открыли» формулу, которая была подмечена Декартом в 1640 году, а позднее переоткрыта Эйлером в 1752 году, имя которого носит с тех пор. Формула Эйлера верна для любых выпуклых многогранников. Более того, она используется для доказательства того факта, что правильных многогранников ровно пять и не более.

Рассмотрев таблицу «Элементы правильных многогранников» следует отметить очень важный момент: икосаэдр и додекаэдр – это пара двойственных правильных многогранников, т.е. у них одинаковое число рёбер, но при этом число граней одного равно числу вершин другого и наоборот. Ещё одной такой парой являются куб и октаэдр.

«Со времён древнегреческих философов правильные многогранники считались не более чем игрушкой для математиков, не имеющей никакого практического значения. Весьма замечательно, что как раз эти фигуры оказались в центре внимания биологов в их яростных спорах относительно точной формы вирусов,» - замечает в своей книге «Нить жизни» крупнейший специалист в области структуры белка, член Лондонского королевского общества Джон Коудери Кендрю.

Рисунок 67. Джон Коудери Кендрю (1917 - 1997).

Джон Кендрю известен тем, что сумел определить пространственную конфигурацию молекулы миоглобина, за что и получил Нобелевскую премию в 1962 году.

В его книге «Нить жизни» помещена чрезвычайно любопытная фотография вируса Tipula.

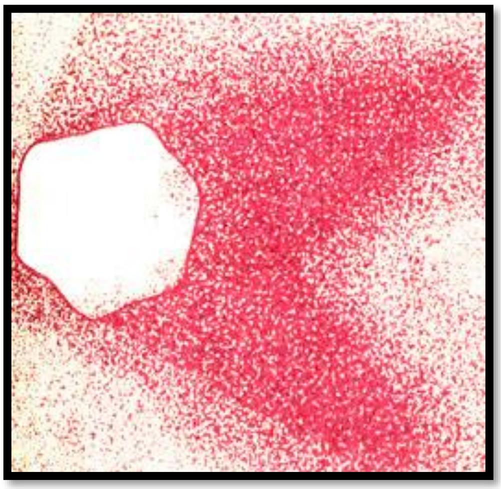


Рисунок 68. Вирус Tipula и его «тени»

До того, как вирус сфотографировали под электронным микроскопом, на него с двух разных сторон направляли атомы металла. В результате позади вируса образовались своего рода «тени». Этот метод двойного напыления позволил разглядеть на фотографии, что тени имеют острые углы! Значит, вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее.

Чтобы установить точную его форму, брали различные многогранники и направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов металла на частицу вируса. Оказалось, что только один многогранник даёт точно такую же тень. Имя его – икосаэдр.

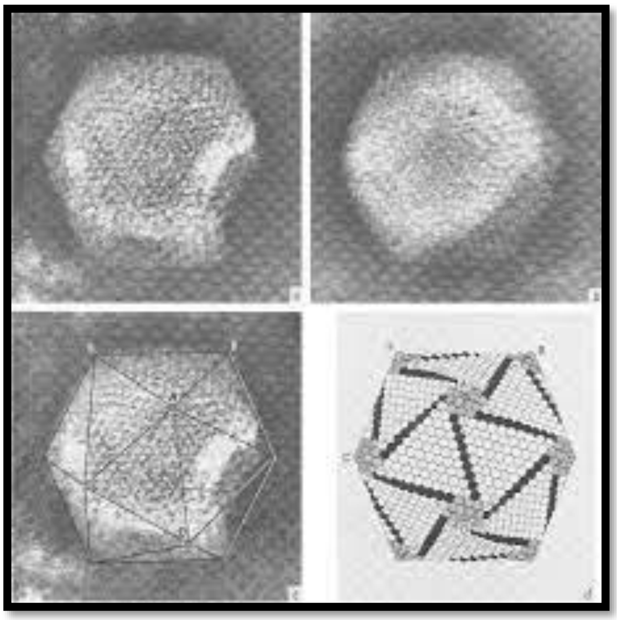


Рисунок 69. Вирус Tipula

Джон Кендрю задаёт в своей книге вопрос и сам же на него отвечает: «Вы можете спросить: а почему обязательно правильный многогранник? И почему именно икосаэдр? По-видимому, тут всё дело в экономии – экономии генетической информации».

Мы знаем, что вирусы – это мельчайшие возбудители многочисленных инфекционных заболеваний человека, животных, растений и бактерий. Вирусы являются внутриклеточными паразитами, не способными к жизнедеятельности вне живых клеток. Вирусы относятся к наиболее примитивным формам жизни. Они обладают наследственностью, которая обусловлена теми же биологическими и химическими структурами, что и у других живых организмов – нуклеиновыми кислотами. Вот почему Кендрю говорит об экономии генетической информации вируса.

Продолжим цитату Кендрю: «Вирусная частица должна весь обмен клетки – хозяина перевернуть вверх дном, она должна заставить заражённую клетку синтезировать многочисленные ферменты и другие молекулы, необходимые для синтеза новых вирусных частиц. Все эти ферменты должны быть закодированы в вирусной нуклеиновой кислоте. Но количество её ограничено. Поэтому для кодирования белков собственной оболочки в нуклеиновой кислоте вируса оставлено совсем мало места. Что же делает вирус? Он просто использует много раз один и тот же участок нуклеиновой кислоты для синтеза большого числа стандартных молекул – строительных белков, объединяющихся в процессе автосборки вирусной частицы. В результате достигается максимальная экономия генетической информации. Остаётся добавить, что по законам математики для построения наиболее экономичным способом замкнутой оболочки из одинаковых элементов нужно сложить из них икосаэдр, который мы наблюдаем у вирусов».

Так вирусы «решают» сложнейшую, так называемую изопиранную задачу: найти тело наименьшей поверхности при заданном объёме и притом состоящее из одинаковых и тоже простейших фигур. А проще треугольника в геометрии никаких других фигур нет. А у икосаэдра грани являются треугольниками.

Вирусы – мельчайшие из организмов – справились с геометрической проблемой, потребовавшей у людей более двух тысячелетий. Все так называемые «сферические вирусы», в том числе такой страшный, как вирус полиомиелита, представляют собой крохотные икосаэдры, а отнюдь не сферы. Эта внушительная и в тоже время удивительно целесообразная конструкция, состоящая из двадцати простейших одинаковых деталей – правильных треугольников и заключающая внутри себя наибольший возможный объём, вновь наталкивает на мысль об изначальной простоте Природы.

Природа строит всё своё богатство и разнообразие из простейших блоков. Недаром же Джон Кендрю назвал вирус «живой архитектурой». В свете этих научных достижений платоновский четырёхэлементный мир не кажется больше таким уже абсурдным.

Итак, правильные многогранники обладают так называемым экстремальным свойством: они способны ограничивать собою объём больший, чем любое другое тело с тем же числом граней. Или же, что тоже самое, иметь наименьшую поверхность среди всех тел с тем же объёмом и числом сторон.

Правильные многогранники – самые «выгодные» фигуры. Природа пользуется этим фактом шире, чем нам думалось. Например, скелет одноклеточного организма феодарии (Circogonia icosahedra) по форме напоминает икосаэдр.

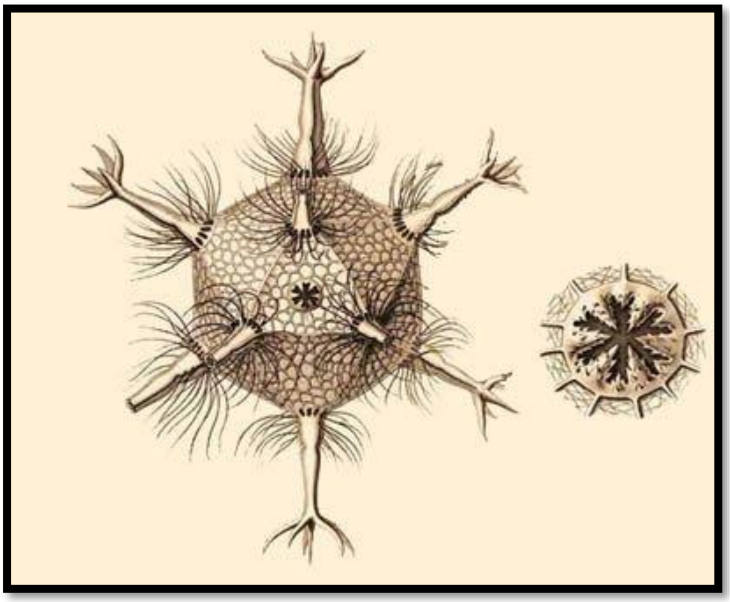


Рисунок 70. Феодария (Circogonia icosahedra)

Большинство феодарий живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Но простейшие животные пытаются себя защитить: из двенадцати вершин скелета выходят двенадцать полых игл. На концах игл находятся зубцы, делающие иглу ещё более эффектной при защите.

Чем же вызвана такая природная геометризация феодарий? Тем, по-видимому, что из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наибольший объём при наименьшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи.

Итак, даже среди самих платоновых тел существует конкуренция по обладанию экстремальными свойствами. И фаворит в ней икосаэдр, вот его-то исключительностью и воспользовались вирусы и феодария.

Рисунок 71. Кристалл поваренной соли NaCl.

«Выгодность» правильных многогранников используется кристаллами, подтверждением этому служит форма некоторых кристаллов.

Взять хотя бы поваренную соль, без которой мы не можем обойтись в повседневной жизни. Известно, что она хорошо растворима в воде, служит проводником электрического тока. А кристаллы поваренной соли (NaCl) имеют форму куба.

При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми квасцами ($K[Al(SO_4)_2] \times 12H_2O$), монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра.

Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана (FeS). Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра.

В разных химических реакциях применяется сурьмянистый сернокислый натрий ($Na_5(SbO_4(SO_4)))$) – вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьмянистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра.

Последний правильный многогранник – икосаэдр. Он передаёт форму кристаллов бора (B). В своё время бор использовался для создания полупроводников первого поколения.

Правильные многогранники, как мы сейчас убедились, не являются идеальными фигурами, существующими только в воображении человека, но находят широкое применение в природе и в науке.

Многим людям известно изречение Пифагора: «Числа правят миром». «Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир,» - так переработал пифагорейскую мудрость, избавив её от идеалистического звучания, Иоганн Вольфганг Гёте. Мысль Пифагора о том, что в первооснове вещей лежат некие простые математические соотношения, крепко пустила корни на нашей планете и часто являлась в гениальные головы, перелетая через тысячелетия и континенты. Кристаллы в виде кубов, тетраэдров и октаэдров, вирусы, ныне обретшие форму икосаэдра, всё это, очевидно, далеко не последние шаги наглядных математических представлений в глубины нашего мира.

Рисунок 72. Иоганн Кеплер (1571 - 1630)

Впрочем, почему только в «глубины»? Почему мы говорим только о свойствах вещества и забываем о додекаэдре – платоновском символе Вселенной?

Если справедлив платоновский принцип: «Геометрия приближает разум к истине», то верен он не только в микро -, но и в макромире. Числа всё-таки должны править миром, они должны описывать законы движения Вселенной. Именно в этом направлении двигалась научная мысль известного немецкого математика и астронома Иоганна Кеплера.

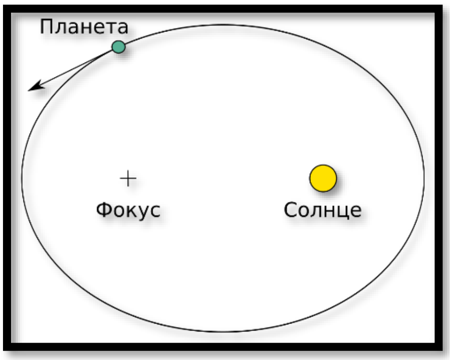


Рисунок 73. Первый закон Кеплера

На протяжении нескольких лет Кеплер исследовал орбиту Марса. На основе обобщения данных, полученных в результате своих наблюдений, он установил три закона движения планет относительно Солнца.

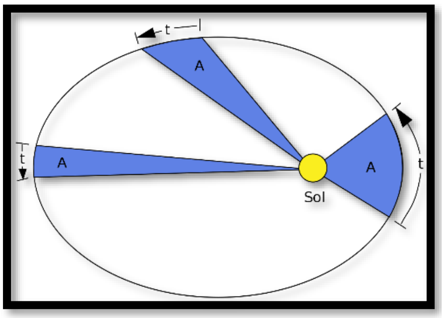


Рисунок 74. Второй закон Кеплера

1 закон Кеплера. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2 закон Кеплера. Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём площадь сектора орбиты, описанная радиус-вектором планеты, измеряется пропорционально времени.

3 закон Кеплера. Квадраты времени обращения планеты вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца.

Выводы Кеплера поражают точностью и определённостью. Он оставил труды, оказавшиеся необычайно полезными для профессиональных астрономов, в том числе Ньютона. Коротко говоря, Кеплер открыл **как** движутся планеты, и тем самым проложил путь Ньютону, который открыл,

почему они так движутся, создав на основе закона всемирного тяготения теорию движения небесных тел.

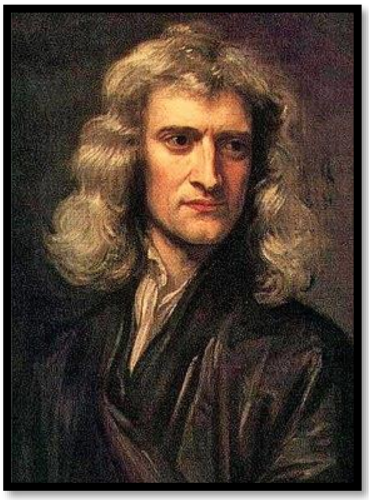


Рисунок 75. Исаак Ньютон (1643-1727)

Но вернёмся к Кеплеру. Открыв основные законы движения планет нашей Солнечной системы, он задался следующим вопросом: а почему они находятся на том или ином расстоянии от Солнца? И тут сказалась приверженность Кеплера к «чистой геометрии». Он писал: «Если бы небесные движения были произведениями разума, можно было бы с основанием заключить, что орбиты планет – совершенные круги… Сам Господь, который был слишком благ, чтобы оставаться праздным, затеял игру в символы, посылал знаки своего подобия в мир. Поэтому я и осмеливаюсь думать, что вся природа и благословенное небо записаны на языке искусства геометрии». Ясно, что человек с такой идеологией должен видеть торжество геометрии во всём, в том числе и во Вселенной. Кеплер пытался найти смысл в расположении планетных орбит, вписывая правильные многоугольники в окружности, а затем сферы - в кубы, последовательно, одну за другой, всё уменьшая их размер. Но никакой аналогии с распределением планет на небесах не возникало.

И вдруг Кеплера осенило. В его время были известны лишь 6 планет Солнечной системы: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн. Планет всего 6, следовательно, промежутков между ними - 5. Но и платоновых тел тоже 5 – не больше и не меньше. Не может быть, чтобы это совпадение оказалось случайным, так думал Кеплер. Ему показалось, что гармония мира и любовь Природы к повторениям сделали правильные многогранники связующими звеньями между шестью небесными телами. Кеплер предположил, что сферы планет связаны между собой вписанными в них платоновыми телами. Он стал вписывать один многогранник в другой, по-разному комбинируя их и вписывая в каждый сферу – математический прообраз планетных орбит. К его радости, эти построения, легшие в основу его книги «Тайна Вселенной», обнаружили определённое сходство с небесным порядком, каким он виделся астрономам в те годы.

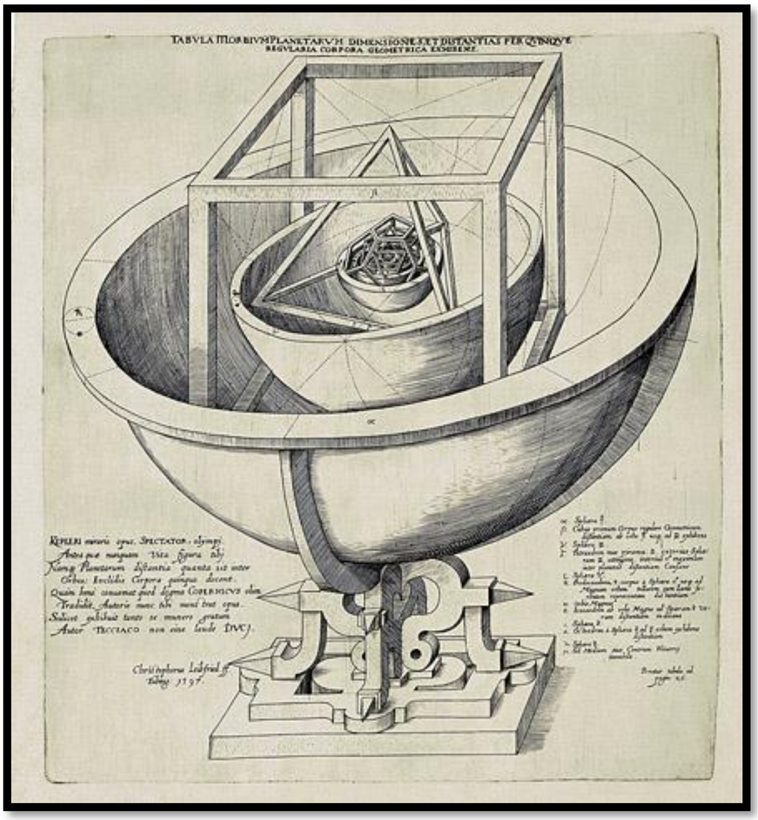


Рисунок 76. Рисунок "Кубка Кеплера"

«Несравненное удовольствие, которое я испытал от этого открытия, невозможно выразить словами,» - писал он. В книге Кеплера есть чертёж, из которого видно, каким он представлял механизм, ведающий размещением планет: вокруг Солнца описана самая большая сфера, по которой движется Сатурн. В неё надо вписать куб, а в куб – сферу, которая определит собой орбиту Юпитера. Если в эту меньшую сферу вписать тетраэдр, а в неё опять сферу, то получится орбита Марса. В эту сферу впишем додекаэдр, а в него новую сферу – орбиту Земли. Далее вписываем икосаэдр, а в него сферу для орбиты Венеры. Осталось вписать в последнюю сферу октаэдр и в него сферу для орбиты Меркурия.

Точные значения орбит у Кеплера не получались, но он считал, что есть разница между «мыслимой идеей круга и действительным путём планеты», поскольку «небесные движения – произведения не разума, а природы». Поэтому ему пришлось подправлять свою модель – шары на его чертеже имеют различную толщину. Но всё это было бы ничего, если бы не открыли новые планеты, а запас платоновых тел, разумеется, не пополнился – их как было, так и осталось пять.

Кеплеровская модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера, но от истинности её пришлось отказаться. Мы твёрдо знаем одно: без гипотез, иногда самых неожиданных, казалось бы, бредовых, не может существовать наука. Мы помним, что именно законы Кеплера и его модель Солнечной системы натолкнули Исаака Ньютона на создание закона всемирного тяготения.

Поиски геометрической целесообразности устройства мира не теряли своей привлекательности и в дальнейшем. Идеи Пифагора, Платона, Кеплера нашли своё продолжение в интересной научной гипотезе, которую в начале 1980-х годов высказали трое советских учёных – российский художник и преподаватель Заочного университета искусств Николай Фёдорович Гончаров, инженеры Валерий Алексеевич Макаров и Вячеслав Семёнович Морозов.

Рисунок 78. Создатели теории ИДСЗ (слева направо): В.С. Морозов, Н.Ф. Гончаров и В.А. Макаров (1974 г.)

В 1960-х годах их заинтересовал удивительный факт: очаги древних культур возникали на Земле периодически на одних и тех же местах, через определённое время после упадка предыдущей цивилизации на этом же месте возникал новый очаг культуры. Н.Ф. Гончаров, В.А. Макаров и В.С. Морозов провели специальные исследования, в результате которых оказалось, что эти места не только повторяются во времени, но и образуют правильную структуру на глобусе Земли. Они нанесли эту структуру на карту и оказалось, что она является суперпозицией (наложением) двух платоновых тел – додекаэдра и икосаэдра. И наиболее вероятностное возникновение новой цивилизации определяется вершинами этих многоугольников на карте. Исследователи связали это со строением Земли, а именно с её ядром.

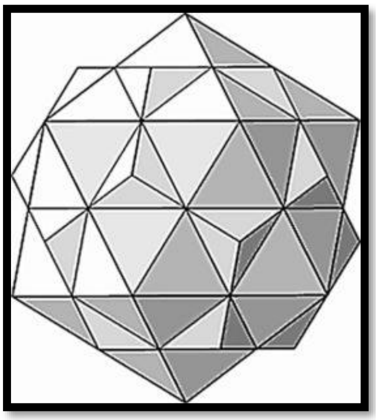


Рисунок 77. Так выглядит ядро Земли с точки зрения гипотезы ИДСЗ

Ими была предложена гипотеза, что ядро имеет не правильную шарообразную форму, как традиционно считалось ранее, а является растущим кристаллом, представляющим собой суперпозицию икосаэдра и додекаэдра и оказывающим воздействия на развитие всех природных процессов на планете. Лучи этого кристалла, а точнее его силовое поле, обусловливают икосаэдро-додекаэдровую структуру Земли. Она проявляется в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра. Н.Ф. Гончаров, В.А. Макаров и В.С. Морозов свою гипотезу назвали «Икосаэдро-додекаэдрическая структура Земли», или ИДСЗ. Согласно этой гипотезе, вещество мантии Земли циркулирует от ядра к поверхности, затем движется вдоль земной коры и опускается снова к ядру. Места, где вещество мантии поднимается к поверхности, и образуют структуру ИДСЗ.

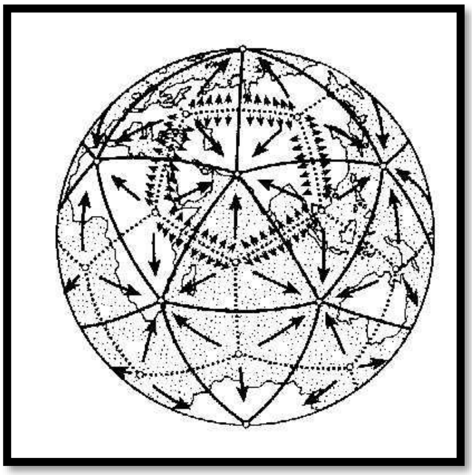


Рисунок 79. Схема движения вещества земной коры

В узлах и рёбрах икосаэдра часто понижен рельеф, отмечается прогиб земной коры, осадконакопление, метаскопления нефти и газа, крупнейшие месторождения алмазов, урана. В узлах и рёбрах додекаэдра рельеф, как правило, повышен или имеет тенденцию к повышению, здесь наблюдается подъём вещества из глубин планеты, образуются глобальные залежи железных руд, геохимические провинции, возникают так называемые рифтовые зоны (рифт – линейно вытянутая структура растяжения земной коры шириной от нескольких десятков до нескольких сотен километров, ограниченная разломами). Вещество глубин внедряется в земную кору, раздвигая и наращивая её.

Движение вещества земной коры происходит в основном от рёбер и вершин додекаэдра к рёбрам и особенно вершинам икосаэдра (или тоже самое от центров треугольников к их вершинам). Такими движениями, в частности, являются движения Аравийского полуострова на северо-восток, земной коры от Байкала к Пакистану, отделение от Американского материка Калифорнийского полуострова.

Таким образом, двадцать районов планеты, соответствующих вершинам додекаэдра, - центры потоков восходящего вещества, а двенадцать других (вершины икосаэдра) – центры нисходящих потоков.

Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдро-додекаэдровой сетки; 62 вершины и середины рёбер многогранников, называемые авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления. Здесь располагаются очаги древних культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана. В этих узлах находятся озеро Лох-Несс и Бермудский треугольник. Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

Создатели ИДСЗ развили гениальную идею Кеплера о связи размеров правильных многогранников с расстояниями планет от Солнца. Оказывается, таинственная связь между планетными расстояниями и свойствами правильных многогранников не рассыпалась окончательно после открытия ещё трёх планет, неизвестных Кеплеру. Просто нужно было ждать ещё 400 лет. Дело в том, что если просчитать «добавленное» пространство «послекеплеровских» планет – Урана, Нептуна и Плутона – по методу самого же Кеплера, то с удалением от Солнца обнаруживаются два комплекта усложняющихся полей: от тетраэдрического до додекаэдрического без нарушения правильной последовательности (см. рис.80).

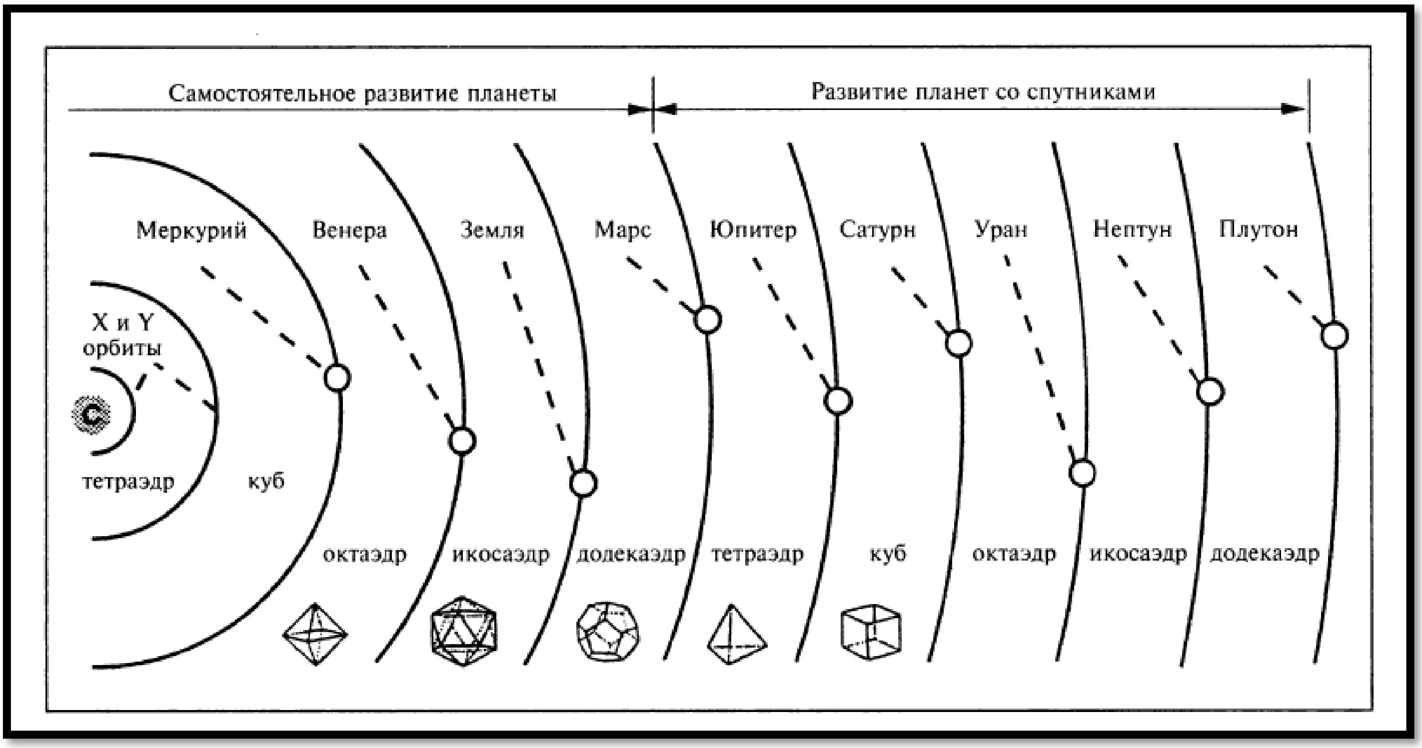


Рисунок 80. Развитие кеплеровской модели Солнечной системы

Итак, благодаря правильным многогранникам и их удивительным свойствам, нам открываются и замечательные свойства других геометрических фигур, и пути познания природных тайн, и гармония Вселенной.

Конечно, все законы красоты невозможно вместить в одну лекцию. Но, изучая математику, мы открываем всё новые и новые слагаемые прекрасного, приближаясь к пониманию, а в дальнейшем и к созданию красоты и гармонии.

Библиография:

Список используемой литературы:

1. Мир математики: в 40 т. Т.1: Фердинанд Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. / Пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2014. – 160с.
2. Левитин. К.Е. Геометрическая рапсодия. – 2-е изд., переработ. И доп. – М.: Знание, 1984. – 176с. С ил.
3. Земля — большой кристалл? - Автор-составитель К.А. Лачугин — М.: Захаров, 2005. — 224 с.
4. Азевич А.И. Двадцать уроков гармонии: Гуманитарно-математический курс. – М.: Школа-Пресс, 1998. – 160 с.:ил. (Библиотека журнала «Математика в школе». Вып.7).
5. Стивен Хокинг. На плечах гигантов / Сборник — «Издательство АСТ», 2004 — (Мир Стивена Хокинга)

Гиперссылки на сайты в интернете:

(1) https://www.youtube.com/watch?v=OlDsMn3JF94 (Анна Броновицкая. Лекция «Ле Корбюзье»)

(2) https://www.youtube.com/watch?v=X2z1952nxNw (Иван Соколов. Лекция «Точка золотого сечения в классической музыке»)